Procesos de ramificación y árboles aleatorios.

Juan Carlos Pardo Millán

CIMAT, Guanajuato

Árboles de Galton-Watson.

Sea μ una medida de probabilidad sobre $\mathbb{Z}_+$ tal que

$$\sum_{k=0}^{\infty} k\mu(k) \leq 1$$

Excluiremos el caso cuando $\mu(1) = 1$.

Árboles de Galton-Watson.

Sea μ una medida de probabilidad sobre $\mathbb{Z}_+$ tal que

$$\sum_{k=0}^{\infty} k\mu(k) \leq 1$$

Excluiremos el caso cuando $\mu(1) = 1$.

Sea $(K_u\ ,\ u \in \mathcal{U})$ una colección de variables aleatorias independientes con distribución μ, indexadas por el conjunto de etiquetas $\mathcal{U}$. Denotemos por θ al subconjunto aleatorio de $\mathcal{U}$ definido por

$$\theta = \{u = u^1 \cdots u^n \in \mathcal{U} : u^i \leq K_{u^1 \ldots u^{i-1}} \text{ para toda } 1 \leq i \leq n\}$$

Proposición

θ es un árbol c.s. Más aún, si

$$Z_n = \#\{u \in \theta : |u| = n\}$$

entonces $(Z_n, n \geq 0)$ es un proceso de Bienaymé-Galton-Watson con distribución de hijos μ y valor inicial $Z_0 = 1$.

Proposición

θ es un árbol c.s. Más aún, si

$$Z_n = \#\{u \in \theta : |u| = n\}$$

entonces $(Z_n, n \geq 0)$ es un proceso de Bienaymé-Galton-Watson con distribución de hijos μ y valor inicial $Z_0 = 1$.

Dem: Sea $\theta \neq \emptyset$. Por lo tanto cuenta con algún elemento u tal que $u = u^1 \cdots u^n$ para álguna $n \geq 1$.

Proposición

θ es un árbol c.s. Más aún, si

$$Z_n = \#\{u \in \theta : |u| = n\}$$

entonces $(Z_n, n \geq 0)$ es un proceso de Bienaymé-Galton-Watson con distribución de hijos μ y valor inicial $Z_0 = 1$.

Dem: Sea $\theta \neq \emptyset$. Por lo tanto cuenta con algún elemento *u* tal que $u = u^1 \cdots u^n$ para álguna $n \geq 1$. De la definición de θ, tendremos que

$$u^i \leq K_{u^1 \dots u^{i-1}} \text{ para toda } 1 \leq i \leq n.$$

Como $\varphi(u) = u^1 \cdots u^{n-1}$, por lo anterior tenemos que en particular

$$u^i \leq K_{u^1 \dots u^{i-1}} \text{ para toda } 1 \leq i \leq n-1.$$

Concluimos que $\varphi(u) \in \theta$ para toda $u \in \theta \setminus \{\emptyset\}$. De esta última propiedad, obtenemos que para $u_1 \in \theta \cap \mathbb{N}$, $\varphi(u^1) = \emptyset$.

Concluimos que $\varphi(u) \in \theta$ para toda $u \in \theta \setminus \{\emptyset\}$. De esta última propiedad, obtenemos que para $u_1 \in \theta \cap \mathbb{N}$, $\varphi(u^1) = \emptyset$.

Considerando ahora la v.a. K_u, tendremos nuevamente por la definición de θ que $u \cdot u^{n+1} \in \theta$ si y sólo si $u^{n+1} \leq K_u$. Por lo tanto θ es un árbol.

Concluimos que $\varphi(u) \in \theta$ para toda $u \in \theta \setminus \{\emptyset\}$. De esta última propiedad, obtenemos que para $u_1 \in \theta \cap \mathbb{N}$, $\varphi(u^1) = \emptyset$.

Considerando ahora la v.a. K_u, tendremos nuevamente por la definición de θ que $u \cdot u^{n+1} \in \theta$ si y sólo si $u^{n+1} \leq K_u$. Por lo tanto θ es un árbol.

Para $n \geq 0$, definamos $A_n = \{u \in \theta : |u| = n\}$. Como el número de individuos en la $(n+1)$-ésima es exactamente el total de hijos de los individuos de la n-ésima generación,

$$\#A_n = \sum_{v \in A_{n-1}} \sup\{i \geq 1 \,:\, v \cdot i \in \theta\} = \sum_{v \in A_{n-1}} K_v.$$

Concluimos que $\varphi(u) \in \theta$ para toda $u \in \theta \setminus \{\emptyset\}$. De esta última propiedad, obtenemos que para $u_1 \in \theta \cap \mathbb{N}$, $\varphi(u^1) = \emptyset$.

Considerando ahora la v.a. K_u, tendremos nuevamente por la definición de θ que $u \cdot u^{n+1} \in \theta$ si y sólo si $u^{n+1} \leq K_u$. Por lo tanto θ es un árbol.

Para $n \geq 0$, definamos $A_n = \{u \in \theta : |u| = n\}$. Como el número de individuos en la $(n+1)$-ésima es exactamente el total de hijos de los individuos de la *n*-ésima generación,

$$\#A_n = \sum_{v \in A_{n-1}} \sup\{i \geq 1 \,:\, v \cdot i \in \theta\} = \sum_{v \in A_{n-1}} K_v.$$

Entonces, el proceso Z lo podemos describir de la siguiente manera,

$$Z_0 = \#A_0 = 1, \quad Z_1 = \#A_1 = K_\emptyset.$$

Para $n \geq 2$

$$Z_n = \#A_n = \sum_{i=1}^{Z_{n-1}} K_{v_{i,n-1}},$$

donde $v_{i,n-1} \in A_{n-1}$.

Para $n \geq 2$

$$Z_n = \#A_n = \sum_{i=1}^{Z_{n-1}} K_{v_{i,n-1}},$$

donde $v_{i,n-1} \in A_{n-1}$.

Por lo tanto Z_n denota el número de individuos de la *n*-ésima generación. Por este mismo argumento, se tiene que $Z_n = 0$ implica que $Z_{n+1} = 0$. Por lo tanto Z es un proceso de Galton-Watson.

Para $n \geq 2$

$$Z_n = \# A_n = \sum_{i=1}^{Z_{n-1}} K_{v_{i,n-1}},$$

donde $v_{i,n-1} \in A_{n-1}$.

Por lo tanto Z_n denota el número de individuos de la *n*-ésima generación. Por este mismo argumento, se tiene que $Z_n = 0$ implica que $Z_{n+1} = 0$. Por lo tanto Z es un proceso de Galton-Watson.

Proposición

Sea θ un árbol μ-Galton-Watson. Entonces

$$\Phi(\theta) \stackrel{(d)}{=} (M_1, M_2, ..., M_T)$$

donde las variable aleatorias $M_1, M_2, ...$ son independientes con distribución μ, y

$$T = \inf\{n \geq 1 : M_1 + M_2 + \cdots + M_n < n\}.$$

Corolario

Sea $(S_n, n \geq 0)$ *una caminata aleatoria sobre* $\mathbb{Z}$ *con valor inicial* S_0 *y distribución de salto* $\nu(k) = \mu(k+1)\ \forall\ k \geq -1$. *Definamos*

$$T = \inf\{n \geq 1 : S_n = -1\}$$

Entonces las trayectorias de Lukasiewicz de un árbol θ, μ*-Galton-Watson tiene la misma distribución que* $(S_0, S_1, ..., S_T)$. *En particular,* $\#(\theta)$ *y* T *tienen la misma distribución.*