Procesos de ramificación y árboles aleatorios.

Juan Carlos Pardo Millán

CIMAT, Guanajuato

Progama:

- Cambio de tiempo.
- Árboles discretos.

Cambio de tiempo

Consideremos a una caminata aleatoria skip-down free. En otras palabras, sea Π una medida de probabilidad en $\{-1, 0, 1, 2, \ldots\}$ y $(\xi_i, i \geq 1)$ una sucesión de v.a..i.i.d. con distribución común Π.

Cambio de tiempo

Consideremos a una caminata aleatoria skip-down free. En otras palabras, sea Π una medida de probabilidad en $\{-1, 0, 1, 2, \ldots\}$ y $(\xi_i, i \geq 1)$ una sucesión de v.a..i.i.d. con distribución común Π.

Para $x \in \mathbb{Z}$, vamos a denotar por $\mathbb{P}_x$ a la ley de $S = (S_n, n \geq 0)$ donde

$$S_n = S_{n-1} + \xi_n, \quad n \geq 1 \qquad \text{y} \quad \mathbb{P}_x(S_0 = x) = 1.$$

Cambio de tiempo

Consideremos a una caminata aleatoria skip-down free. En otras palabras, sea Π una medida de probabilidad en $\{-1, 0, 1, 2, \ldots\}$ y $(\xi_i, i \geq 1)$ una sucesión de v.a..i.i.d. con distribución común Π.

Para $x \in \mathbb{Z}$, vamos a denotar por $\mathbb{P}_x$ a la ley de $S = (S_n, n \geq 0)$ donde

$$S_n = S_{n-1} + \xi_n, \quad n \geq 1 \qquad \text{y} \quad \mathbb{P}_x(S_0 = x) = 1.$$

Recordemos que $\mathcal{F}_n = \sigma\{S_k, k \leq n\}$, i.e. la información del proceso hasta el tiempo n. Además observemos que

$$\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}, \qquad \text{para toda} \quad n \geq 0.$$

Cambio de tiempo

Consideremos a una caminata aleatoria skip-down free. En otras palabras, sea Π una medida de probabilidad en $\{-1, 0, 1, 2, \ldots\}$ y $(\xi_i, i \geq 1)$ una sucesión de v.a..i.i.d. con distribución común Π.

Para $x \in \mathbb{Z}$, vamos a denotar por $\mathbb{P}_x$ a la ley de $S = (S_n, n \geq 0)$ donde

$$S_n = S_{n-1} + \xi_n, \quad n \geq 1 \qquad \text{y} \quad \mathbb{P}_x(S_0 = x) = 1.$$

Recordemos que $\mathcal{F}_n = \sigma\{S_k, k \leq n\}$, i.e. la información del proceso hasta el tiempo n. Además observemos que

$$\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}, \qquad \text{para toda} \quad n \geq 0.$$

Tambien recordemos que T es un tiempo de paro si

$$\{T = n\} \in \mathcal{F}_n.$$

Proposición

Sean $\tau_{n+1} = \tau_n + S_{\tau_n}$ *para* $n \geq 0$ *con* $\tau_0 = 0$. *Entonces* $(\tau_n, n \geq 1)$ *es una sucesión de tiempos de paro t.q* $\tau_n \leq T_0$ *para toda* n *y además el proceso* $(S_{\tau_n}, n \geq 0)$ *tiene la misma ley que un proceso de BGW con distribución de progenie* $\rho_k = \Pi(k-1), k \geq 0$.

Proposición

Sean $\tau_{n+1} = \tau_n + S_{\tau_n}$ *para* $n \geq 0$ *con* $\tau_0 = 0$. *Entonces* $(\tau_n, n \geq 1)$ *es una sucesión de tiempos de paro t.q* $\tau_n \leq T_0$ *para toda* n *y además el proceso* $(S_{\tau_n}, n \geq 0)$ *tiene la misma ley que un proceso de BGW con distribución de progenie* $\rho_k = \Pi(k-1), k \geq 0$.

Demostración: Primero observemos que

$$T_0 = \inf\{n \geq 0 : S_n = 0\},$$

es un tiempo de paro.

Proposición

Sean $\tau_{n+1} = \tau_n + S_{\tau_n}$ para $n \geq 0$ con $\tau_0 = 0$. Entonces $(\tau_n, n \geq 1)$ es una sucesión de tiempos de paro t.q $\tau_n \leq T_0$ para toda n y además el proceso $(S_{\tau_n}, n \geq 0)$ tiene la misma ley que un proceso de BGW con distribución de progenie $\rho_k = \Pi(k-1), k \geq 0$.

Demostración: Primero observemos que

$$T_0 = \inf\{n \geq 0 : S_n = 0\},$$

es un tiempo de paro. Esto se sigue de la igualdad

$$\{T_0 = n\} = \{S_0 \neq 0, S_1 \neq 0, \ldots, S_{n-1} \neq 0, S_n = 0\} \in \mathcal{F}_n.$$

Proposición

Sean $\tau_{n+1} = \tau_n + S_{\tau_n}$ *para* $n \geq 0$ *con* $\tau_0 = 0$. *Entonces* $(\tau_n, n \geq 1)$ *es una sucesión de tiempos de paro t.q* $\tau_n \leq T_0$ *para toda* n *y además el proceso* $(S_{\tau_n}, n \geq 0)$ *tiene la misma ley que un proceso de BGW con distribución de progenie* $\rho_k = \Pi(k-1), k \geq 0$.

Demostración: Primero observemos que

$$T_0 = \inf\{n \geq 0 : S_n = 0\},$$

es un tiempo de paro. Esto se sigue de la igualdad

$$\{T_0 = n\} = \{S_0 \neq 0, S_1 \neq 0, \ldots, S_{n-1} \neq 0, S_n = 0\} \in \mathcal{F}_n.$$

Ahora veamos que los tiempos definidos

$$\tau_{n+1} = \tau_n + S_{\tau_n}, \qquad \text{con} \qquad \tau_0 = 0,$$

son tiempos de paro, que satisfacen $\tau_n \leq T_0$ y $\lim_{n\to\infty} \tau_n = T_0$.

Si $T_0 = \infty$, entonces es claro que $\tau_n \leq T_0$ y que $S_{\tau_k} \geq 1$ para toda k y por ende

$$\lim_{n\to\infty} \tau_{n+1} \geq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} S_{\tau_k} = \infty.$$

Si $T_0 = \infty$, entonces es claro que $\tau_n \leq T_0$ y que $S_{\tau_k} \geq 1$ para toda k y por ende

$$\lim_{n\to\infty} \tau_{n+1} \geq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} S_{\tau_k} = \infty.$$

Para el caso $T_0 < \infty$, primero probemos por inducción que $\tau_n \leq T_0$ para toda n.

Si $T_0 = \infty$, entonces es claro que $\tau_n \leq T_0$ y que $S_{\tau_k} \geq 1$ para toda k y por ende

$$\lim_{n\to\infty} \tau_{n+1} \geq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} S_{\tau_k} = \infty.$$

Para el caso $T_0 < \infty$, primero probemos por inducción que $\tau_n \leq T_0$ para toda n.

El caso $n = 0$ es claro. Supongamos que se cumple para algún n, entonces

$$S_m \geq 1, \qquad \text{para todo} \quad m < \tau_n.$$

Si $T_0 = \infty$, entonces es claro que $\tau_n \leq T_0$ y que $S_{\tau_k} \geq 1$ para toda k y por ende

$$\lim_{n\to\infty} \tau_{n+1} \geq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} S_{\tau_k} = \infty.$$

Para el caso $T_0 < \infty$, primero probemos por inducción que $\tau_n \leq T_0$ para toda n.

El caso $n = 0$ es claro. Supongamos que se cumple para algún n, entonces

$$S_m \geq 1, \qquad \text{para todo} \quad m < \tau_n.$$

Por otro lado, observemos

$$S_{\tau_n+k} = S_{\tau_n} + \sum_{j=1}^{k} \xi_{j+\tau_n} \geq S_{\tau_n} - k,$$

ya que $\xi_i \geq -1$.

Lo cual implica que

$$S_{\tau_n+k} > 0, \qquad \text{para} \qquad k < S_{\tau_n}.$$

Lo cual implica que

$$S_{\tau_n+k} > 0, \qquad \text{para} \qquad k < S_{\tau_n}.$$

Entonces, $S_m \geq 1$ para toda $m < \tau_n + S_{\tau_n} = \tau_{n+1}$. En otras palabras $\tau_{n+1} \leq T_0$.

Lo cual implica que

$$S_{\tau_n+k} > 0, \qquad \text{para} \qquad k < S_{\tau_n}.$$

Entonces, $S_m \geq 1$ para toda $m < \tau_n + S_{\tau_n} = \tau_{n+1}$. En otras palabras $\tau_{n+1} \leq T_0$.

Esto nos permite concluir que $S_{\tau_n} \geq 0$ para toda $n \geq 0$, y por ende que la sucesión $(\tau_n, n \geq 1)$ es creciente y convergente al ser acotada.

Lo cual implica que

$$S_{\tau_n+k} > 0, \qquad \text{para} \qquad k < S_{\tau_n}.$$

Entonces, $S_m \geq 1$ para toda $m < \tau_n + S_{\tau_n} = \tau_{n+1}$. En otras palabras $\tau_{n+1} \leq T_0$.

Esto nos permite concluir que $S_{\tau_n} \geq 0$ para toda $n \geq 0$, y por ende que la sucesión $(\tau_n, n \geq 1)$ es creciente y convergente al ser acotada.

El límite tiene que ser T_0, ya que si no lo es tendríamos que para toda n, $\tau_n < T_0$ implicando que $S_{\tau_n} \geq 1$ y por lo tanto

$$T_0 \geq \lim_{n\to\infty} \tau_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} S_{\tau_k} = \infty,$$

lo cual es una contradicción.

Finalmente probemos por inducción que $(\tau_n, n \geq 1)$ son tiempos de paro. Supongamos que es cierto para alguna n y probemos que se cumple para $n+1$, i.e.

$$\{\tau_{n+1} = k\} = \{\tau_n + S_{\tau_n} = k\} = \bigcup_{i=1}^{k} \{\tau_n = i, S_{\tau_n} = k - i\} \in \mathcal{F}_k.$$

Finalmente probemos por inducción que $(\tau_n, n \geq 1)$ son tiempos de paro. Supongamos que es cierto para alguna n y probemos que se cumple para $n+1$, i.e.

$$\{\tau_{n+1} = k\} = \{\tau_n + S_{\tau_n} = k\} = \bigcup_{i=1}^{k} \{\tau_n = i, S_{\tau_n} = k - i\} \in \mathcal{F}_k.$$

Por último veamos que $(S_{\tau_n}, n \geq 0)$ es un proceso de BGW. Para ello observemos lo siguiente

Finalmente probemos por inducción que $(\tau_n, n \geq 1)$ son tiempos de paro. Supongamos que es cierto para alguna n y probemos que se cumple para $n+1$, i.e.

$$\{\tau_{n+1} = k\} = \{\tau_n + S_{\tau_n} = k\} = \bigcup_{i=1}^{k} \{\tau_n = i, S_{\tau_n} = k - i\} \in \mathcal{F}_k.$$

Por último veamos que $(S_{\tau_n}, n \geq 0)$ es un proceso de BGW. Para ello observemos lo siguiente

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_x(S_{\tau_{n+1}} = y | S_{\tau_n} = z) &= \mathbb{P}_x\left(S_0 + \sum_{j=1}^{S_{\tau_{n+1}}} \xi_j = y \middle| S_{\tau_n} = z\right) \\
&= \mathbb{P}_x\left(S_{\tau_n} + \sum_{j=1}^{S_{\tau_n}} \xi_{\tau_n + j} = y \middle| S_{\tau_n} = z\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^{z} \xi'_j = y - z\right) = \Pi^{*z}(y - z).
\end{aligned}$$

Árboles

Los Árboles son objetos matemáticos que juegan un rol importante en diferentes áreas de las matemáticas y otras ciencias:

Árboles

Los Árboles son objetos matemáticos que juegan un rol importante en diferentes áreas de las matemáticas y otras ciencias:

- Combinatoira, teoría de gráficas: Los árboles son simples ejemplos de gráficas y pueden ser usadas para codificar gráficas más complicadas.

Árboles

Los Árboles son objetos matemáticos que juegan un rol importante en diferentes áreas de las matemáticas y otras ciencias:

- Combinatoira, teoría de gráficas: Los árboles son simples ejemplos de gráficas y pueden ser usadas para codificar gráficas más complicadas.
- Probabilidad: Los árboles son herramientas para estudiar a los procesos de ramificación y otros objetos aleatorios que describen la evolución de poblaciones.

Árboles

Los Árboles son objetos matemáticos que juegan un rol importante en diferentes áreas de las matemáticas y otras ciencias:

- Combinatoira, teoría de gráficas: Los árboles son simples ejemplos de gráficas y pueden ser usadas para codificar gráficas más complicadas.
- Probabilidad: Los árboles son herramientas para estudiar a los procesos de ramificación y otros objetos aleatorios que describen la evolución de poblaciones.
- Biología matemática: Genética de poblaciones, conexiones con coalescentes.

Árboles

Los Árboles son objetos matemáticos que juegan un rol importante en diferentes áreas de las matemáticas y otras ciencias:

- Combinatoira, teoría de gráficas: Los árboles son simples ejemplos de gráficas y pueden ser usadas para codificar gráficas más complicadas.
- Probabilidad: Los árboles son herramientas para estudiar a los procesos de ramificación y otros objetos aleatorios que describen la evolución de poblaciones.
- Biología matemática: Genética de poblaciones, conexiones con coalescentes.
- Ciencias de la computación: Los árboles son importantes para almacenar y organizar información en una computadora y así puedan ser usadas de manera eficiente.

Árboles discretos

Definamos a continuación el conjunto de etiquetas

$$\mathcal{U} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbb{N}^n,$$

donde $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ y por convención $\mathbb{N}^0 = \{\emptyset\}$.

Árboles discretos

Definamos a continuación el conjunto de etiquetas

$$\mathcal{U} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbb{N}^n,$$

donde $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ y por convención $\mathbb{N}^0 = \{\emptyset\}$.

Sea $u \in \mathcal{U}$ entonces $u = (u^1, u^2, ..., u^m) \in \mathbb{N}^m$ para algún m natural y escribimos $|u| = m$ para denotar la generación de u.

Árboles discretos

Definamos a continuación el conjunto de etiquetas

$$\mathcal{U} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbb{N}^n,$$

donde $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ y por convención $\mathbb{N}^0 = \{\emptyset\}$.

Sea $u \in \mathcal{U}$ entonces $u = (u^1, u^2, ..., u^m) \in \mathbb{N}^m$ para algún m natural y escribimos $|u| = m$ para denotar la generación de u.

Si $u = (u^1, u^2, ..., u^m)$ y $v = (v^1, v^2, ..., v^n)$ son elementos de $\mathcal{U}$, escribimos $uv = (u^1, u^2, ..., u^m, v^1, v^2, ..., v^n)$ como la concatenación de u y v. En particular tendremos que $u\emptyset = \emptyset u = u$ y $u = u^1 u^2 \cdots u^m$.

Árboles discretos

Definamos a continuación el conjunto de etiquetas

$$\mathcal{U} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbb{N}^n,$$

donde $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ y por convención $\mathbb{N}^0 = \{\emptyset\}$.

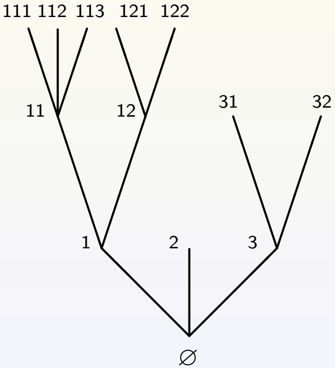
Sea $u \in \mathcal{U}$ entonces $u = (u^1, u^2, ..., u^m) \in \mathbb{N}^m$ para algún m natural y escribimos $|u| = m$ para denotar la generación de u.

Si $u = (u^1, u^2, ..., u^m)$ y $v = (v^1, v^2, ..., v^n)$ son elementos de $\mathcal{U}$, escribimos $uv = (u^1, u^2, ..., u^m, v^1, v^2, ..., v^n)$ como la concatenación de u y v. En particular tendremos que $u\emptyset = \emptyset u = u$ y $u = u^1 u^2 \cdots u^m$.

$u \preceq v$ si u es un ancestro de v, i.e. existe $w \in \mathcal{U}$ tal que $uw = v$.

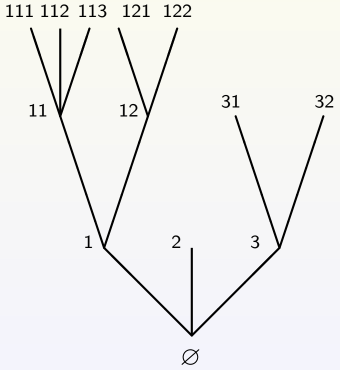
Sean $u, v \in \mathcal{U}$, denotamos por $u \wedge v$ al ancestro común más grande de u y v.

Sean $u, v \in \mathcal{U}$, denotamos por $u \wedge v$ al ancestro común más grande de u y v.

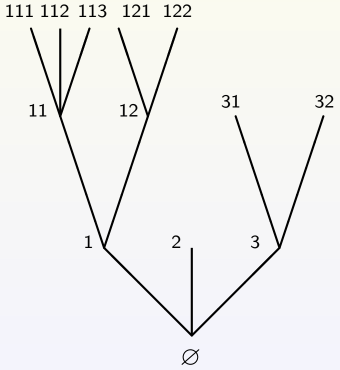


Sean $u, v \in \mathcal{U}$, denotamos por $u \wedge v$ al ancestro común más grande de u y v.

Por ejemplo



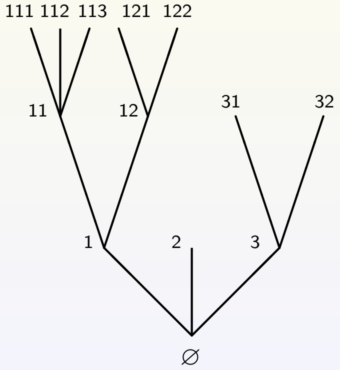
Sean $u, v \in \mathcal{U}$, denotamos por $u \wedge v$ al ancestro común más grande de u y v.



Por ejemplo

- El ancestro común entre 111 y 122 es 1.

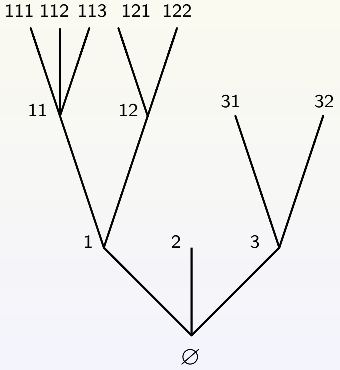
Sean $u, v \in \mathcal{U}$, denotamos por $u \wedge v$ al ancestro común más grande de u y v.



Por ejemplo

- El ancestro común entre 111 y 122 es 1.
- 1 es ancestro de 111, 112, 113, 121 y 122.

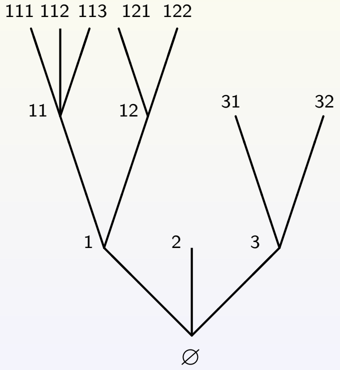
Sean $u, v \in \mathcal{U}$, denotamos por $u \wedge v$ al ancestro común más grande de u y v.



Por ejemplo

- El ancestro común entre 111 y 122 es 1.
- 1 es ancestro de 111, 112, 113, 121 y 122.
- |111|=|112|=|113|=3.

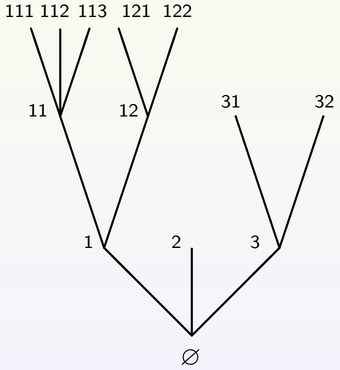
Sean $u, v \in \mathcal{U}$, denotamos por $u \wedge v$ al ancestro común más grande de u y v.



Por ejemplo

- El ancestro común entre 111 y 122 es 1.
- 1 es ancestro de 111, 112, 113, 121 y 122.
- $|111|=|112|=|113|=3$.
- $|31|=|32|=2$.

Sean $u, v \in \mathcal{U}$, denotamos por $u \wedge v$ al ancestro común más grande de u y v.



Por ejemplo

- El ancestro común entre 111 y 122 es 1.
- 1 es ancestro de 111, 112, 113, 121 y 122.
- $|111|=|112|=|113|=3$.
- $|31|=|32|=2$.
- 12 es la concatenación de 1 y 2.

Sea $\varphi : \mathcal{U} \setminus \{\emptyset\} \to \mathcal{U}$ una aplicación definida por

$$\varphi(u^1 u^2 \cdots u^m) = u^1 u^2 \cdots u^{m-1},$$

la aplicación $\varphi(u)$ es el padre de u.

Sea $\varphi : \mathcal{U} \setminus \{\emptyset\} \to \mathcal{U}$ una aplicación definida por

$$\varphi(u^1 u^2 \cdots u^m) = u^1 u^2 \cdots u^{m-1},$$

la aplicación $\varphi(u)$ es el padre de u.

Definición

Un árbol finito ordenado con raíz, es un subconjunto finito $\mathbf{t} \subset \mathcal{U}$ tal que:

Sea $\varphi : \mathcal{U} \setminus \{\emptyset\} \to \mathcal{U}$ una aplicación definida por

$$\varphi(u^1 u^2 \cdots u^m) = u^1 u^2 \cdots u^{m-1},$$

la aplicación $\varphi(u)$ es el padre de u.

Definición

Un árbol finito ordenado con raíz, es un subconjunto finito $\mathbf{t} \subset \mathcal{U}$ tal que:

(i) $\emptyset \in \mathbf{t}$

Sea $\varphi : \mathcal{U} \setminus \{\emptyset\} \to \mathcal{U}$ una aplicación definida por

$$\varphi(u^1 u^2 \cdots u^m) = u^1 u^2 \cdots u^{m-1},$$

la aplicación $\varphi(u)$ es el padre de u.

Definición

Un árbol finito ordenado con raíz, es un subconjunto finito $\mathbf{t} \subset \mathcal{U}$ tal que:

(i) $\emptyset \in \mathbf{t}$

(ii) *Si $u \in \mathbf{t} \setminus \{\emptyset\}$ entonces también $\varphi(u) \in \mathbf{t}$*

Sea $\varphi : \mathcal{U} \setminus \{\emptyset\} \to \mathcal{U}$ una aplicación definida por

$$\varphi(u^1 u^2 \cdots u^m) = u^1 u^2 \cdots u^{m-1},$$

la aplicación $\varphi(u)$ es el padre de u.

Definición

Un árbol finito ordenado con raíz, es un subconjunto finito $\mathbf{t} \subset \mathcal{U}$ tal que:

(i) $\emptyset \in \mathbf{t}$

(ii) *Si $u \in \mathbf{t} \setminus \{\emptyset\}$ entonces también $\varphi(u) \in \mathbf{t}$*

(iii) *Para todo $u \in \mathbf{t}$ existe un entero $k_u(\mathbf{t}) \geq 0$, tal que $\forall\, i \in \mathbb{N}$:*

$$ui \in \mathbf{t} \text{ si y solo si } 1 \leq i \leq k_u(\mathbf{t}).$$

Sea $\varphi : \mathcal{U} \setminus \{\emptyset\} \to \mathcal{U}$ una aplicación definida por

$$\varphi(u^1 u^2 \cdots u^m) = u^1 u^2 \cdots u^{m-1},$$

la aplicación $\varphi(u)$ es el padre de u.

Definición

Un árbol finito ordenado con raíz, es un subconjunto finito $\mathbf{t} \subset \mathcal{U}$ tal que:

(i) $\emptyset \in \mathbf{t}$

(ii) *Si $u \in \mathbf{t} \setminus \{\emptyset\}$ entonces también $\varphi(u) \in \mathbf{t}$*

(iii) *Para todo $u \in \mathbf{t}$ existe un entero $k_u(\mathbf{t}) \geq 0$, tal que $\forall\, i \in \mathbb{N}$:*

$$ui \in \mathbf{t} \ \text{ si y solo si } \ 1 \leq i \leq k_u(\mathbf{t}).$$

A los árboles finitos (con raíz) también se les conoce como árboles planos con raíz.

Sea $\varphi : \mathcal{U} \setminus \{\emptyset\} \to \mathcal{U}$ una aplicación definida por

$$\varphi(u^1 u^2 \cdots u^m) = u^1 u^2 \cdots u^{m-1},$$

la aplicación $\varphi(u)$ es el padre de u.

Definición

Un árbol finito ordenado con raíz, es un subconjunto finito $\mathbf{t} \subset \mathcal{U}$ tal que:

(i) $\emptyset \in \mathbf{t}$

(ii) *Si $u \in \mathbf{t} \setminus \{\emptyset\}$ entonces también $\varphi(u) \in \mathbf{t}$*

(iii) *Para todo $u \in \mathbf{t}$ existe un entero $k_u(\mathbf{t}) \geq 0$, tal que $\forall\, i \in \mathbb{N}$:*

$$ui \in \mathbf{t} \ \textit{ si y solo si } \ 1 \leq i \leq k_u(\mathbf{t}).$$

A los árboles finitos (con raíz) también se les conoce como árboles planos con raíz. Los elementos de $\mathbf{t}$ son llamados vértices.

Sea $\varphi : \mathcal{U} \setminus \{\emptyset\} \to \mathcal{U}$ una aplicación definida por

$$\varphi(u^1 u^2 \cdots u^m) = u^1 u^2 \cdots u^{m-1},$$

la aplicación $\varphi(u)$ es el padre de u.

Definición

Un árbol finito ordenado con raíz, es un subconjunto finito $\mathbf{t} \subset \mathcal{U}$ tal que:

(i) $\emptyset \in \mathbf{t}$

(ii) *Si $u \in \mathbf{t} \setminus \{\emptyset\}$ entonces también $\varphi(u) \in \mathbf{t}$*

(iii) *Para todo $u \in \mathbf{t}$ existe un entero $k_u(\mathbf{t}) \geq 0$, tal que $\forall\, i \in \mathbb{N}$:*

$$ui \in \mathbf{t} \ \text{ si y solo si } \ 1 \leq i \leq k_u(\mathbf{t}).$$

A los árboles finitos (con raíz) también se les conoce como árboles planos con raíz. Los elementos de $\mathbf{t}$ son llamados vértices. Un vértice $ui \in \mathbf{t}$, con $u \in \mathcal{U}$ e $i \in \mathbb{N}$, es llamado un hijo de u.

Interpretamos a $k_u(\mathbf{t})$ como el número de hijos de u en $\mathbf{t}$. Observemos que

$$k_u(\mathbf{t}) = \sup\{i \geq 1 : ui \in \mathbf{t}\}.$$

Interpretamos a $k_u(\mathbf{t})$ como el número de hijos de u en $\mathbf{t}$. Observemos que

$$k_u(\mathbf{t}) = \sup\{i \geq 1 : ui \in \mathbf{t}\}.$$

La noción de hermano, ancestro y descendiente son naturalmente inducidas por la de hijo tal como en la vida cotidiana. La generación $|u|$ es igualmente conocida como la altura de u. Los vértices que no tienen hijos son llamados hojas.

Interpretamos a $k_u(\mathbf{t})$ como el número de hijos de u en $\mathbf{t}$. Observemos que

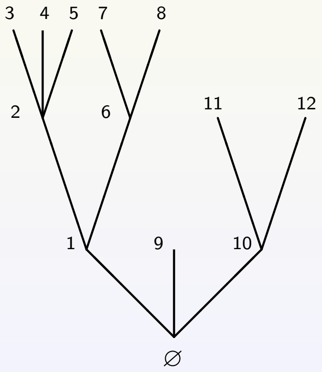
$$k_u(\mathbf{t}) = \sup\{i \geq 1 : ui \in \mathbf{t}\}.$$

La noción de hermano, ancestro y descendiente son naturalmente inducidas por la de hijo tal como en la vida cotidiana. La generación $|u|$ es igualmente conocida como la altura de u. Los vértices que no tienen hijos son llamados hojas.

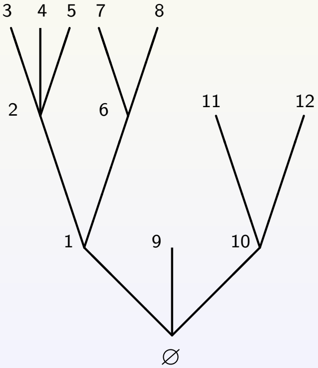
Sea $\mathcal{A} = \{$árboles finitos ordenados con raíz$\}$. En lo subsecuente, se considerará a los elementos del árbol $\mathbf{t}$ como individuos de una población para la cuál $\mathbf{t}$ es el árbol genealógico. La cardinalidad $\#(\mathbf{t})$ de $\mathbf{t}$, es la progenie total.

Al conjunto $\mathcal{U}$ lo consideraremos con el orden lexicográfico ($\leq$); tenemos que $u \leq v$ si $u \preceq v$ o si $u \wedge v$ es un *ancestro* estrictamente distinto de u y v de manera que $u_{|u\wedge v|+1} < v_{|u\wedge v|+1}$.

Al conjunto $\mathcal{U}$ lo consideraremos con el orden lexicográfico ($\leq$); tenemos que $u \leq v$ si $u \preceq v$ o si $u \wedge v$ es un *ancestro* estrictamente distinto de u y v de manera que $u_{|u \wedge v|+1} < v_{|u \wedge v|+1}$.



Al conjunto $\mathcal{U}$ lo consideraremos con el orden lexicográfico $(\leq)$; tenemos que $u \leq v$ si $u \preceq v$ o si $u \wedge v$ es un *ancestro* estrictamente distinto de u y v de manera que $u_{|u\wedge v|+1} < v_{|u\wedge v|+1}$.



Proposición

Sean $\mathbf{t_1}, \mathbf{t_2} \in \mathcal{A}$ tales que $\#(\mathbf{t_1}) = \#(\mathbf{t_2}) = N$ y $u_0, u_1, ..., u_{N-1}$, $v_0, v_1, ..., v_{N-1}$ sus respectivos elementos en orden lexicográfico. Si para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $k_{u_n}(\mathbf{t_1}) = k_{v_n}(\mathbf{t_2})$, entonces $\mathbf{t_1} = \mathbf{t_2}$. En particular $u_n = v_n$ para toda n.

Demostración: Sean $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2 \in \mathcal{A}$ como en la hipótesis. Procederemos por inducción sobre la progenie total de los árboles.

Demostración: Sean $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2 \in \mathcal{A}$ como en la hipótesis. Procederemos por inducción sobre la progenie total de los árboles.

Para $N = 1, 2$, ver que $\mathbf{t}_1 = \mathbf{t}_2$ es inmediato de observar ya que $u_0 = \emptyset = v_0$, al ser árboles deterministas.

Demostración: Sean $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2 \in \mathcal{A}$ como en la hipótesis. Procederemos por inducción sobre la progenie total de los árboles.

Para $N = 1, 2$, ver que $\mathbf{t}_1 = \mathbf{t}_2$ es inmediato de observar ya que $u_0 = \emptyset = v_0$, al ser árboles deterministas.

Supongamos ahora que la hipótesis se cumple para árboles con progenie de tamaño m con $m \leq N - 1$ y verifiquemos que se cumple para N.

Demostración: Sean $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2 \in \mathcal{A}$ como en la hipótesis. Procederemos por inducción sobre la progenie total de los árboles.

Para $N = 1, 2$, ver que $\mathbf{t}_1 = \mathbf{t}_2$ es inmediato de observar ya que $u_0 = \emptyset = v_0$, al ser árboles deterministas.

Supongamos ahora que la hipótesis se cumple para árboles con progenie de tamaño m con $m \leq N - 1$ y verifiquemos que se cumple para N.

Sean $\mathbf{t}_1 = \{u_0, u_1, ..., u_N\}$ y $\mathbf{t_2} = \{v_0, v_1, ..., v_N\}$ con $k_{u_i}(\mathbf{t_1}) = k_{v_i}(\mathbf{t_2})$ $(0 \leq i \leq N)$, y consideramos los árboles $\mathbf{t_1'} = \mathbf{t_1} - \{u_N\}$ y $\mathbf{t_2'} = \mathbf{t_2} - \{v_N\} \in \mathcal{A}$.

Demostración: Sean $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2 \in \mathcal{A}$ como en la hipótesis. Procederemos por inducción sobre la progenie total de los árboles.

Para $N = 1, 2$, ver que $\mathbf{t}_1 = \mathbf{t}_2$ es inmediato de observar ya que $u_0 = \emptyset = v_0$, al ser árboles deterministas.

Supongamos ahora que la hipótesis se cumple para árboles con progenie de tamaño m con $m \leq N - 1$ y verifiquemos que se cumple para N.

Sean $\mathbf{t}_1 = \{u_0, u_1, ..., u_N\}$ y $\mathbf{t_2} = \{v_0, v_1, ..., v_N\}$ con $k_{u_i}(\mathbf{t_1}) = k_{v_i}(\mathbf{t_2})$ $(0 \leq i \leq N)$, y consideramos los árboles $\mathbf{t_1'} = \mathbf{t_1} - \{u_N\}$ y $\mathbf{t_2'} = \mathbf{t_2} - \{v_N\} \in \mathcal{A}$.

Por hipótesis de inducción se sigue que $\mathbf{t_1'} = \mathbf{t_2'}$, por lo que falta verificar que $u_N = v_N$.

Para esto último observemos que por la definición de árbol, parte (ii), se tiene que $\varphi(u_N) = u_i$ y $\varphi(v_N) = v_j$ para algún $1 \leq i, j \leq N-1$, pero $u_\ell = v_\ell$ para toda $\ell \in \{1, \ldots, N-1\}$, lo que nos indica que

$$
\begin{aligned}
u_N &= v_i \cdot \alpha \quad 1 \leq \alpha \leq k_{u_i}(\mathbf{t_1}) = k_{v_i}(\mathbf{t_2}) \quad \Rightarrow \quad u_N \in \mathbf{t_2}, \\
v_N &= u_j \cdot \beta \quad 1 \leq \beta \leq k_{v_j}(\mathbf{t_1}) = k_{u_j}(\mathbf{t_2}) \quad \Rightarrow \quad v_N \in \mathbf{t_1}.
\end{aligned}
$$

Para esto último observemos que por la definición de árbol, parte (ii), se tiene que $\varphi(u_N) = u_i$ y $\varphi(v_N) = v_j$ para algún $1 \leq i, j \leq N-1$, pero $u_\ell = v_\ell$ para toda $\ell \in \{1, \ldots, N-1\}$, lo que nos indica que

$$\begin{aligned} u_N &= v_i \cdot \alpha \quad 1 \leq \alpha \leq k_{u_i}(\mathbf{t_1}) = k_{v_i}(\mathbf{t_2}) \quad \Rightarrow \quad u_N \in \mathbf{t_2}, \\ v_N &= u_j \cdot \beta \quad 1 \leq \beta \leq k_{v_j}(\mathbf{t_1}) = k_{u_j}(\mathbf{t_2}) \quad \Rightarrow \quad v_N \in \mathbf{t_1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $u_N = v_N$ y en consecuencia $\mathbf{t_1} = \mathbf{t_2}$.

Codificación de los árboles por funciones discretas.

Codificación de los árboles por funciones discretas.

Definición

Sea $\mathbf{t} \in \mathcal{A}$*, denotemos por* $u_o = \emptyset, u_1, u_2, \cdots, u_{\#(\mathbf{t})-1}$ *a los elementos de* $\mathbf{t}$ *en orden lexicográfico. La función de altura asociada al árbol* $\mathbf{t}$*, es la función*

$$h_{\mathbf{t}} : \{n \in \mathbb{N} : 0 \leq n \leq \#(\mathbf{t}) - 1\} \longrightarrow \{|u_j| : 0 \leq j \leq \#(\mathbf{t}) - 1\}$$

definida por $h_{\mathbf{t}}(n) = |u_n|$.

Codificación de los árboles por funciones discretas.

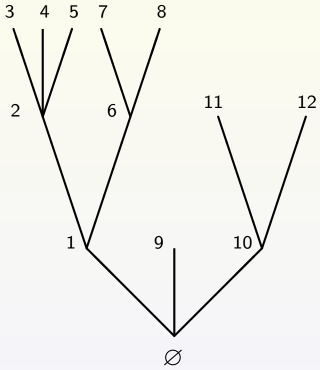
Definición

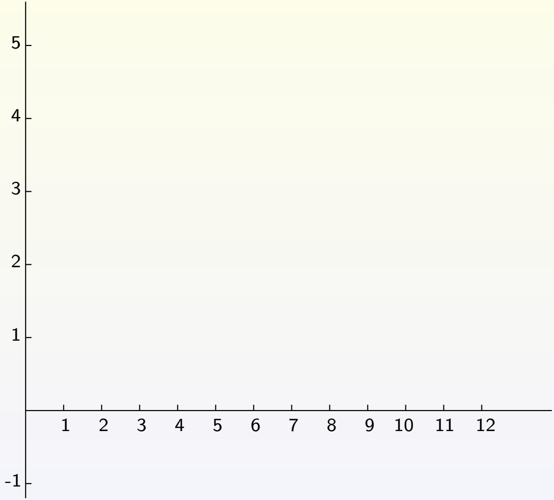
Sea $\mathbf{t} \in \mathcal{A}$*, denotemos por* $u_o = \emptyset, u_1, u_2, \cdots, u_{\#(\mathbf{t})-1}$ *a los elementos de* $\mathbf{t}$ *en orden lexicográfico. La función de altura asociada al árbol* $\mathbf{t}$*, es la función*

$$h_{\mathbf{t}} : \{n \in \mathbb{N} : 0 \leq n \leq \#(\mathbf{t}) - 1\} \longrightarrow \{|u_j| : 0 \leq j \leq \#(\mathbf{t}) - 1\}$$

definida por $h_{\mathbf{t}}(n) = |u_n|$*.*

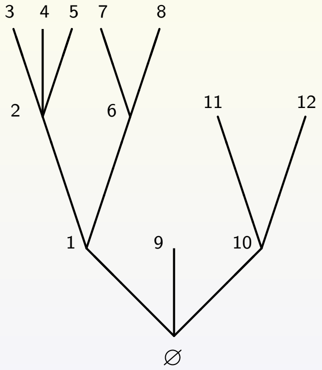
A todo árbol en $\mathcal{A}$ lo caracteriza su función altura, ya que nos da información acerca de la cardinalidad del árbol y el número de hijos de cada uno de sus vértices. Es posible verificar esto último inductivamente con la definición dada en términos de un supremo para el número de hijos de un vértice u en un árbol $\mathbf{t}$.



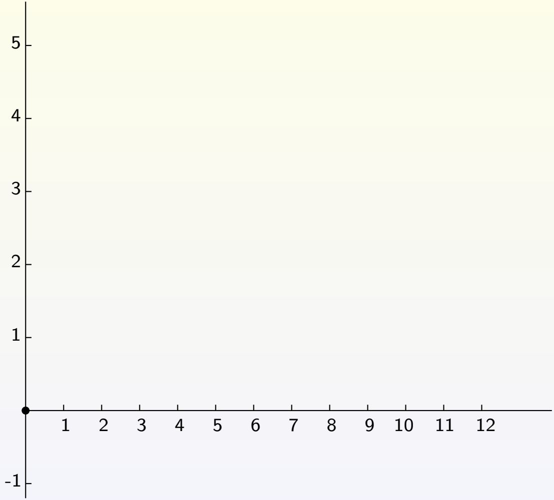


Árbol con raíz $\mathbf{t}$

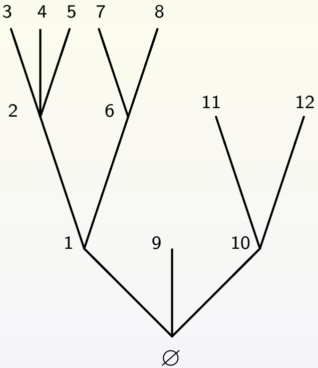
función de altura $h_{\mathbf{t}}$

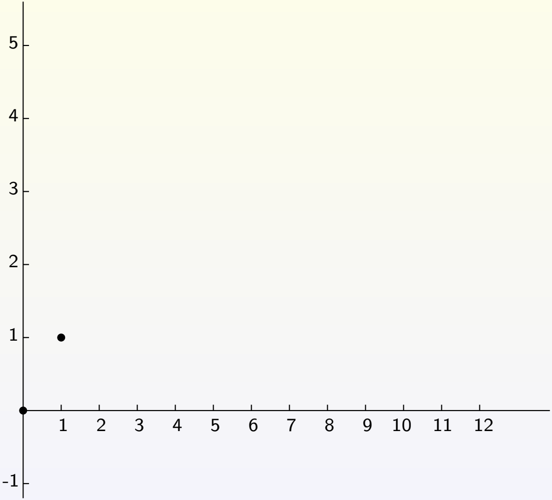


Árbol con raíz $\mathbf{t}$

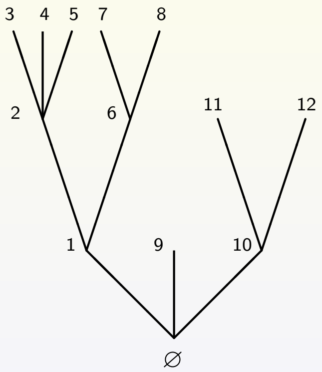


función de altura $h_{\mathbf{t}}$

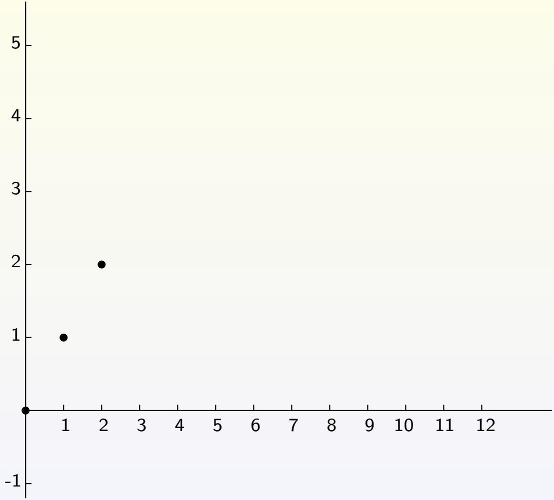




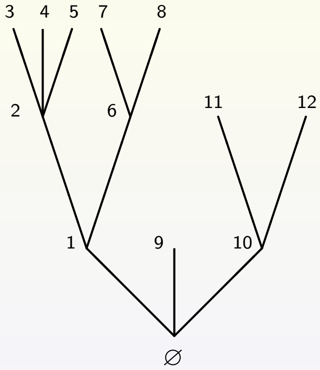
Árbol con raíz $\mathbf{t}$ función de altura $h_{\mathbf{t}}$



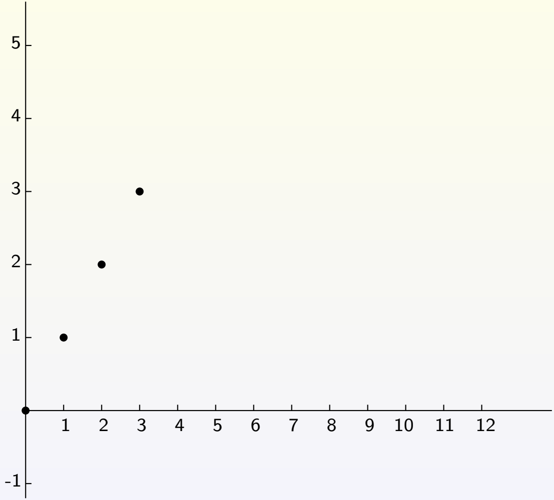
Árbol con raíz $\mathbf{t}$



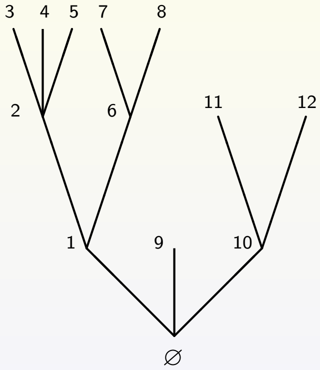
función de altura $h_{\mathbf{t}}$



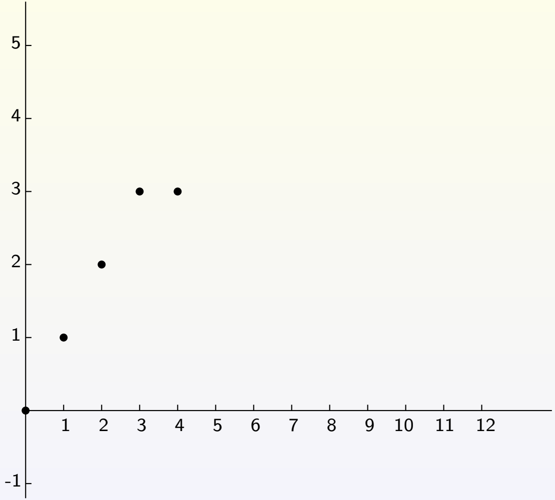
Árbol con raíz $\mathbf{t}$



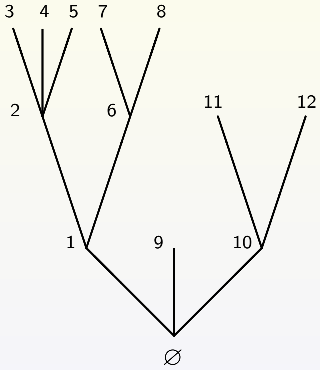
función de altura $h_{\mathbf{t}}$

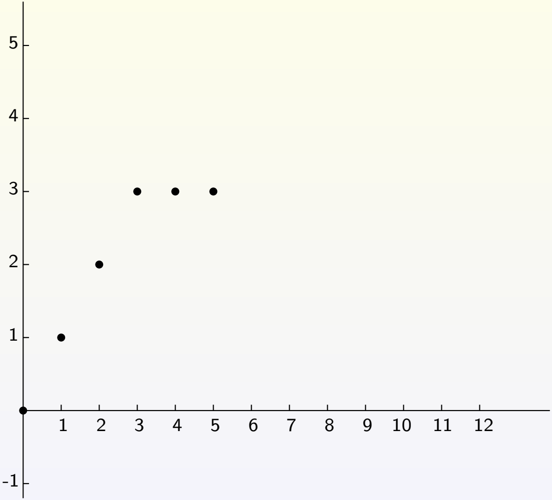


Árbol con raíz $\mathbf{t}$



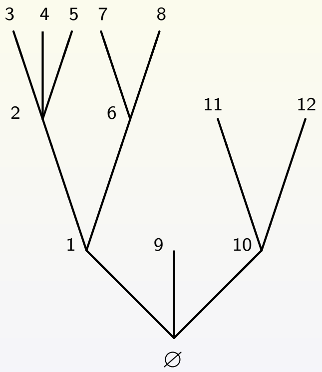
función de altura $h_{\mathbf{t}}$



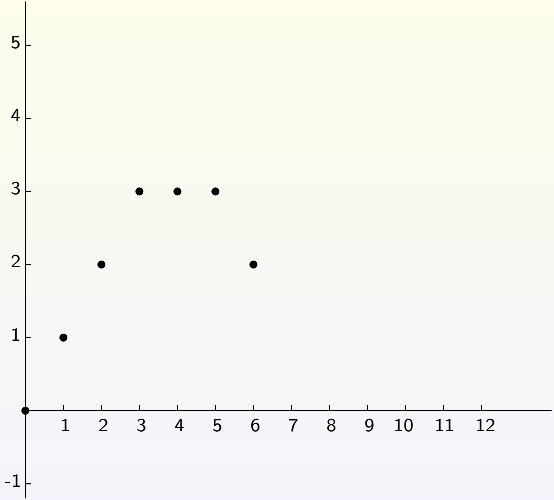


Árbol con raíz $\mathbf{t}$

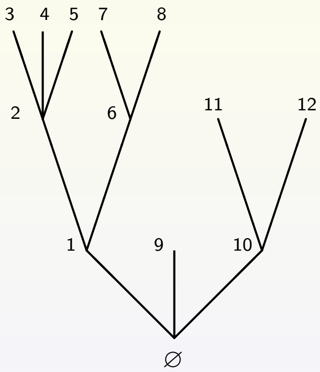
función de altura $h_{\mathbf{t}}$



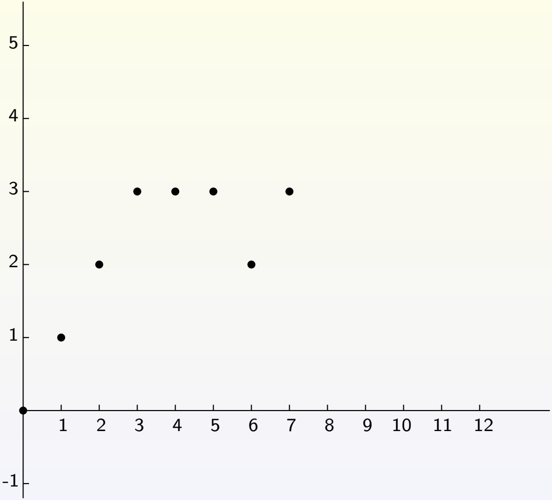
Árbol con raíz $\mathbf{t}$



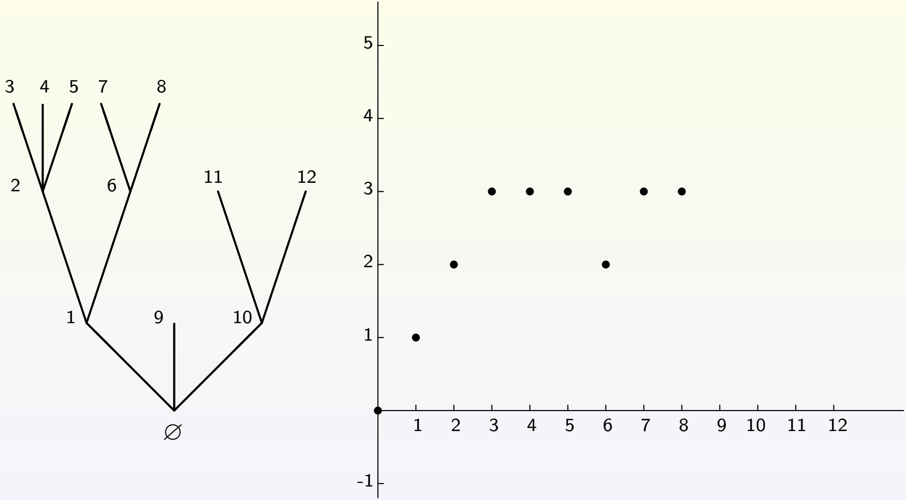
función de altura $h_{\mathbf{t}}$



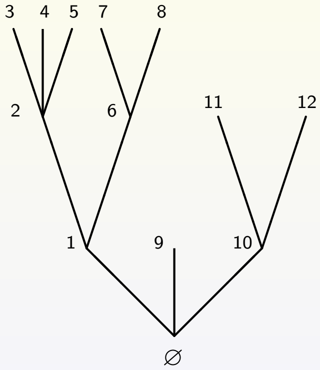
Árbol con raíz $\mathbf{t}$



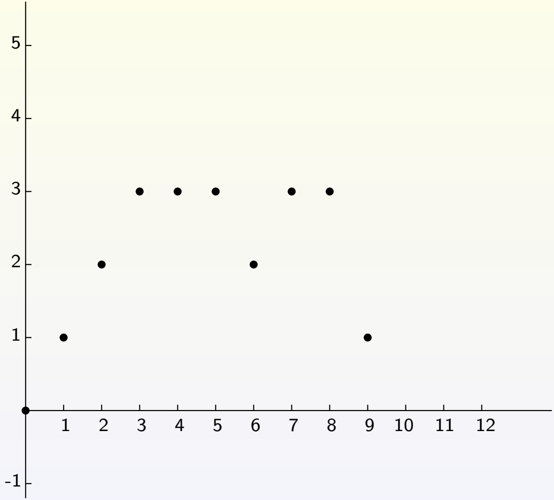
función de altura $h_{\mathbf{t}}$



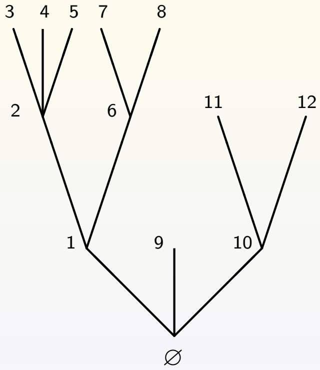
Árbol con raíz $\mathbf{t}$ función de altura $h_{\mathbf{t}}$

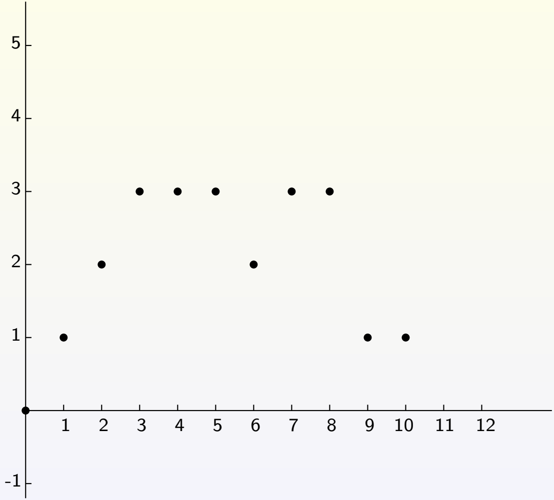


Árbol con raíz $\mathbf{t}$



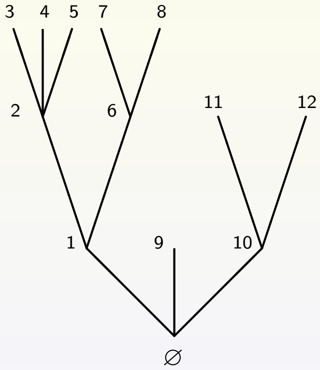
función de altura $h_{\mathbf{t}}$

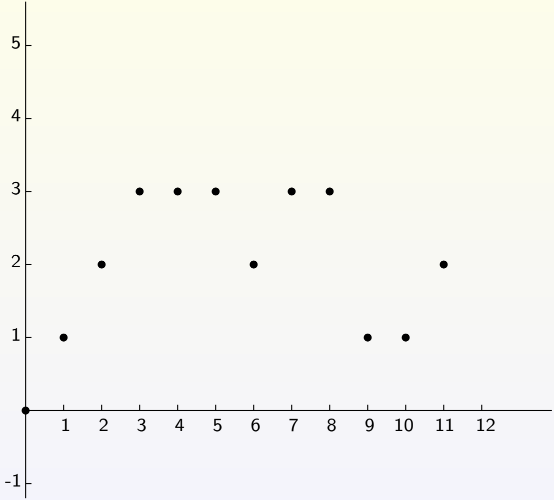




Árbol con raíz $\mathbf{t}$

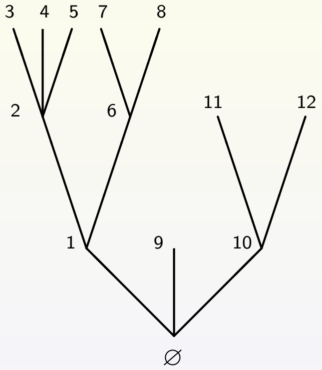
función de altura $h_{\mathbf{t}}$



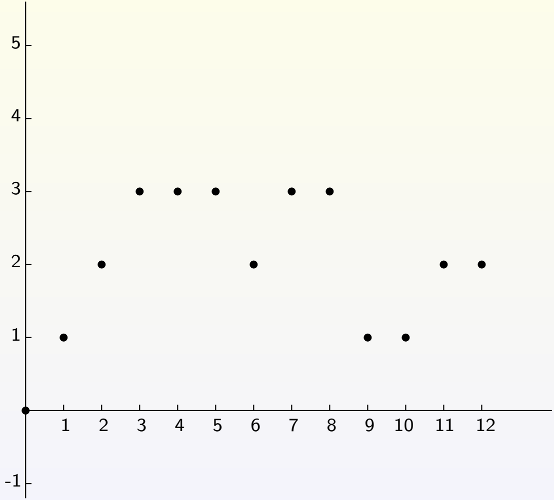


Árbol con raíz $\mathbf{t}$

función de altura $h_{\mathbf{t}}$



Árbol con raíz $\mathbf{t}$



función de altura $h_{\mathbf{t}}$

Introducimos otra manera de codificar un árbol. Denotamos por $\mathcal{S}$ a las sucesiones finitas de enteros no-negativos $\{m_i\}_{i=1}^{n}$ con $n \geq 1$ tales que

Introducimos otra manera de codificar un árbol. Denotamos por $\mathcal{S}$ a las sucesiones finitas de enteros no-negativos $\{m_i\}_{i=1}^n$ con $n \geq 1$ tales que

- $m_1 + m_2 + \cdots + m_i \geq i \quad \forall i \in \{1, 2, ..., n-1\},$

Introducimos otra manera de codificar un árbol. Denotamos por $\mathcal{S}$ a las sucesiones finitas de enteros no-negativos $\{m_i\}_{i=1}^{n}$ con $n \geq 1$ tales que

- $m_1 + m_2 + \cdots + m_i \geq i \quad \forall i \in \{1, 2, ..., n-1\}$,
- $m_1 + m_2 + \cdots + m_n = n - 1$.

Introducimos otra manera de codificar un árbol. Denotamos por $\mathcal{S}$ a las sucesiones finitas de enteros no-negativos $\{m_i\}_{i=1}^n$ con $n \geq 1$ tales que

- $m_1 + m_2 + \cdots + m_i \geq i \quad \forall i \in \{1, 2, ..., n-1\}$,
- $m_1 + m_2 + \cdots + m_n = n - 1$.

Recordemos que $u_0 = \emptyset$, $u_1, u_2, \cdots, u_{\#(\mathbf{t})-1}$ son los elementos de $\mathbf{t}$ en orden lexicográfico.

Introducimos otra manera de codificar un árbol. Denotamos por $\mathcal{S}$ a las sucesiones finitas de enteros no-negativos $\{m_i\}_{i=1}^{n}$ con $n \geq 1$ tales que

- $m_1 + m_2 + \cdots + m_i \geq i \quad \forall i \in \{1, 2, ..., n-1\}$,
- $m_1 + m_2 + \cdots + m_n = n - 1$.

Recordemos que $u_0 = \emptyset$, $u_1, u_2, \cdots, u_{\#(\mathbf{t})-1}$ son los elementos de **t** en orden lexicográfico.

Proposición

La función

$$\Phi : \mathbf{t} \longmapsto (k_{u_0}(\mathbf{t}), k_{u_1}(\mathbf{t}), ..., k_{u_{\#(\mathbf{t})-1}}(\mathbf{t}))$$

define una biyección entre $\mathcal{A}$ y $\mathcal{S}$.

Introducimos otra manera de codificar un árbol. Denotamos por $\mathcal{S}$ a las sucesiones finitas de enteros no-negativos $\{m_i\}_{i=1}^n$ con $n \geq 1$ tales que

- $m_1 + m_2 + \cdots + m_i \geq i \quad \forall i \in \{1, 2, ..., n-1\}$,
- $m_1 + m_2 + \cdots + m_n = n - 1$.

Recordemos que $u_0 = \emptyset$, $u_1, u_2, \cdots, u_{\#(\mathbf{t})-1}$ son los elementos de $\mathbf{t}$ en orden lexicográfico.

Proposición

La función

$$\Phi : \mathbf{t} \longmapsto (k_{u_0}(\mathbf{t}), k_{u_1}(\mathbf{t}), ..., k_{u_{\#(\mathbf{t})-1}}(\mathbf{t}))$$

define una biyección entre $\mathcal{A}$ y $\mathcal{S}$.

Demostración: Notamos que si $\#(\mathbf{t}) = N$, la suma $k_{u_0}(\mathbf{t}) + k_{u_1}(\mathbf{t}) + \cdots + k_{u_{\#(\mathbf{t})-1}}(\mathbf{t})$ es el total de hijos de todos los individuos del árbol y en consecuencia es igual a $N - 1$.

Más aún, si $i \in \{1, 2, ..., n-2\}$, $k_{u_0}(\mathbf{t}) + k_{u_1}(\mathbf{t}) + \cdots + k_{u_i}(\mathbf{t})$ es el número de hijos de $u_0, u_1, \cdots, u_i$, por lo tanto es mayor igual que i, porque $u_1, u_2, \cdots, u_i$ son contados entre estos hijos.

Más aún, si $i \in \{1, 2, ..., n-2\}$, $k_{u_0}(\mathbf{t}) + k_{u_1}(\mathbf{t}) + \cdots + k_{u_i}(\mathbf{t})$ es el número de hijos de $u_0, u_1, \cdots, u_i$, por lo tanto es mayor igual que i, porque $u_1, u_2, \cdots, u_i$ son contados entre estos hijos.

Incluso es una desigualdad estricta ya que el padre de u_{i+1} está en $\{u_0, u_1, \cdots, u_i\}$. De esta información concluimos fácilmente que Φ es sobreyectiva, ya que para una sucesión $\{m_i\}_{i=0}^{n} \in \mathcal{S}$ bastará asociarle el elemento $\mathbf{t} \in \mathcal{A}$, tal que $k_{u_i}(\mathbf{t}) = m_i$ para toda $i \in \{0, 1, ..., n\}$ y $\#(\mathbf{t}) = n$.

Más aún, si $i \in \{1, 2, ..., n-2\}$, $k_{u_0}(\mathbf{t}) + k_{u_1}(\mathbf{t}) + \cdots + k_{u_i}(\mathbf{t})$ es el número de hijos de $u_0, u_1, \cdots, u_i$, por lo tanto es mayor igual que i, porque $u_1, u_2, \cdots, u_i$ son contados entre estos hijos.

Incluso es una desigualdad estricta ya que el padre de u_{i+1} está en $\{u_0, u_1, \cdots, u_i\}$. De esta información concluimos fácilmente que Φ es sobreyectiva, ya que para una sucesión $\{m_i\}_{i=0}^{n} \in \mathcal{S}$ bastará asociarle el elemento $\mathbf{t} \in \mathcal{A}$, tal que $k_{u_i}(\mathbf{t}) = m_i$ para toda $i \in \{0, 1, ..., n\}$ y $\#(\mathbf{t}) = n$.

Sean ahora $\mathbf{t_1}, \mathbf{t_2} \in \mathcal{A}$ tal que $\Phi(\mathbf{t_1}) = \Phi(\mathbf{t_2})$, esto ocurre si y solo si

$$\left(k_{u_0}(\mathbf{t_1}),\ k_{u_1}(\mathbf{t_1}), ..., k_{u_{\#(\mathbf{t_1})-1}}(\mathbf{t_1})\right) = \left(k_{v_0}(\mathbf{t_2}),\ k_{v_1}(\mathbf{t_2}), ..., k_{v_{\#(\mathbf{t_2})-1}}(\mathbf{t_2})\right).$$

Más aún, si $i \in \{1, 2, ..., n-2\}$, $k_{u_0}(\mathbf{t}) + k_{u_1}(\mathbf{t}) + \cdots + k_{u_i}(\mathbf{t})$ es el número de hijos de $u_0, u_1, \cdots, u_i$, por lo tanto es mayor igual que i, porque $u_1, u_2, \cdots, u_i$ son contados entre estos hijos.

Incluso es una desigualdad estricta ya que el padre de u_{i+1} está en $\{u_0, u_1, \cdots, u_i\}$. De esta información concluimos fácilmente que Φ es sobreyectiva, ya que para una sucesión $\{m_i\}_{i=0}^{n} \in \mathcal{S}$ bastará asociarle el elemento $\mathbf{t} \in \mathcal{A}$, tal que $k_{u_i}(\mathbf{t}) = m_i$ para toda $i \in \{0, 1, ..., n\}$ y $\#(\mathbf{t}) = n$.

Sean ahora $\mathbf{t_1}, \mathbf{t_2} \in \mathcal{A}$ tal que $\Phi(\mathbf{t_1}) = \Phi(\mathbf{t_2})$, esto ocurre si y solo si

$$\left(k_{u_0}(\mathbf{t_1}),\ k_{u_1}(\mathbf{t_1}), ..., k_{u_{\#(\mathbf{t_1})-1}}(\mathbf{t_1})\right) = \left(k_{v_0}(\mathbf{t_2}),\ k_{v_1}(\mathbf{t_2}), ..., k_{v_{\#(\mathbf{t_2})-1}}(\mathbf{t_2})\right).$$

Esto implica que

$$\#(\mathbf{t_1}) = \#(\mathbf{t_2}) = N \ \text{ y } \ k_{u_i}(\mathbf{t_1}) = k_{v_i}(\mathbf{t_2}) \ \text{ para toda } i \in \{0, 1, \ldots, N-1\}.$$

Se sigue de la Proposición anterior que $\mathbf{t_1} = \mathbf{t_2}$. Por lo tanto Φ es inyectiva.

Sea $\mathbf{t} \in \mathcal{A}$ y $n = \#(\mathbf{t})$. Más que hacer referencia a $\Phi(\mathbf{t}) = (m_1, ..., m_n)$, consideraremos frecuentemente la sucesión finita de enteros

$$x_k = \sum_{i=1}^{k} (m_i - 1) \text{ con } 0 \leq k \leq n,$$

que satisface las siguientes propiedades:

Sea $\mathbf{t} \in \mathcal{A}$ y $n = \#(\mathbf{t})$. Más que hacer referencia a $\Phi(\mathbf{t}) = (m_1, ..., m_n)$, consideraremos frecuentemente la sucesión finita de enteros

$$x_k = \sum_{i=1}^{k} (m_i - 1) \text{ con } 0 \leq k \leq n,$$

que satisface las siguientes propiedades:

- $x_0 = 0$ y $x_n = -1$,

Sea $\mathbf{t} \in \mathcal{A}$ y $n = \#(\mathbf{t})$. Más que hacer referencia a $\Phi(\mathbf{t}) = (m_1, ..., m_n)$, consideraremos frecuentemente la sucesión finita de enteros

$$x_k = \sum_{i=1}^{k} (m_i - 1) \text{ con } 0 \leq k \leq n,$$

que satisface las siguientes propiedades:

- $x_0 = 0$ y $x_n = -1$,
- $x_i \geq 0$ para todo $0 \leq i \leq n - 1$,

Sea $\mathbf{t} \in \mathcal{A}$ y $n = \#(\mathbf{t})$. Más que hacer referencia a $\Phi(\mathbf{t}) = (m_1, ..., m_n)$, consideraremos frecuentemente la sucesión finita de enteros

$$x_k = \sum_{i=1}^{k} (m_i - 1) \text{ con } 0 \leq k \leq n,$$

que satisface las siguientes propiedades:

- $x_0 = 0$ y $x_n = -1$,
- $x_i \geq 0$ para todo $0 \leq i \leq n-1$,
- $(x_i - x_{i-1}) = (m_i - 1) \geq -1$ para todo $1 \leq i \leq n$.

Sea $\mathbf{t} \in \mathcal{A}$ y $n = \#(\mathbf{t})$. Más que hacer referencia a $\Phi(\mathbf{t}) = (m_1, ..., m_n)$, consideraremos frecuentemente la sucesión finita de enteros

$$x_k = \sum_{i=1}^{k} (m_i - 1) \text{ con } 0 \leq k \leq n,$$

que satisface las siguientes propiedades:

- $x_0 = 0$ y $x_n = -1$,
- $x_i \geq 0$ para todo $0 \leq i \leq n-1$,
- $(x_i - x_{i-1}) = (m_i - 1) \geq -1$ para todo $1 \leq i \leq n$.

Tal sucesión es llamada la trayectoria de Lukasiewicsz del árbol $\mathbf{t}$.

Sea $\mathbf{t} \in \mathcal{A}$ y $n = \#(\mathbf{t})$. Más que hacer referencia a $\Phi(\mathbf{t}) = (m_1, ..., m_n)$, consideraremos frecuentemente la sucesión finita de enteros

$$x_k = \sum_{i=1}^{k} (m_i - 1) \text{ con } 0 \leq k \leq n,$$

que satisface las siguientes propiedades:

- $x_0 = 0$ y $x_n = -1$,
- $x_i \geq 0$ para todo $0 \leq i \leq n-1$,
- $(x_i - x_{i-1}) = (m_i - 1) \geq -1$ para todo $1 \leq i \leq n$.

Tal sucesión es llamada la trayectoria de Lukasiewicsz del árbol $\mathbf{t}$.

Denotamos por $\mathcal{L}_{\mathcal{A}} = \{\text{trayectorias de Lukasiewicsz de árboles en } \mathcal{A}\}$.
No es difícil ver que la función Φ de la proposición anterior induce una biyección entre los árboles en $\mathcal{A}$ y sus trayectorias de Lukasiewicz.

Sea $\mathbf{t} \in \mathcal{A}$ y $n = \#(\mathbf{t})$. Más que hacer referencia a $\Phi(\mathbf{t}) = (m_1, ..., m_n)$, consideraremos frecuentemente la sucesión finita de enteros

$$x_k = \sum_{i=1}^{k} (m_i - 1) \text{ con } 0 \leq k \leq n,$$

que satisface las siguientes propiedades:

- $x_0 = 0$ y $x_n = -1$,
- $x_i \geq 0$ para todo $0 \leq i \leq n-1$,
- $(x_i - x_{i-1}) = (m_i - 1) \geq -1$ para todo $1 \leq i \leq n$.

Tal sucesión es llamada la trayectoria de Lukasiewicsz del árbol $\mathbf{t}$.

Denotamos por $\mathcal{L}_{\mathcal{A}} = \{$trayectorias de Lukasiewicsz de árboles en $\mathcal{A}\}$. No es difícil ver que la función Φ de la proposición anterior induce una biyección entre los árboles en $\mathcal{A}$ y sus trayectorias de Lukasiewicz.

Sea $\mathbf{t} \in \mathcal{A}$ y $u_0, u_1, \ldots, u_{\#(\mathbf{t})-1}$ sus elementos en orden lexicográfico, de nuestras definiciones es fácil ver que la relación $u \prec v$ ocurre si y sólo si v es estrictamente un descendiente de u.

Proposición

Sea $h_{\mathbf{t}}$ la función altura de un árbol $\mathbf{t} \in \mathcal{A}$, entonces es posible expresar $h_{\mathbf{t}}$ en términos de la trayectoria de Lukasiewicz del respectivo árbol de la siguiente manera:

$$h_{\mathbf{t}}(n) = \#\left\{ i \in \{0, 1, \dots, n-1\} : x_i = \inf_{i \leq k \leq n} x_k \right\},$$

para todo $n \in \{0, 1, \dots, \#(\mathbf{t}) - 1\}$.

Proposición

Sea $h_{\mathbf{t}}$ la función altura de un árbol $\mathbf{t} \in \mathcal{A}$, entonces es posible expresar $h_{\mathbf{t}}$ en términos de la trayectoria de Lukasiewicz del respectivo árbol de la siguiente manera:

$$h_{\mathbf{t}}(n) = \#\left\{ i \in \{0, 1, \ldots, n-1\} : x_i = \inf_{i \leq k \leq n} x_k \right\},$$

para todo $n \in \{0, 1, \ldots, \#(\mathbf{t}) - 1\}$.

Demostración: Claramente

$$h_{\mathbf{t}}(n) = |u_n| = \#\{i \in \{0, 1, ..., n-1\} : u_i \prec u_n\},$$

por lo que bastaría probar que para $i \in \{0, 1, ..., n-1\}$, $u_i \prec u_n$ ocurre si y sólo si $x_i = \inf_{i \leq k \leq n} x_k$.

Para este fin, es suficiente verificar que

$$\inf_k \{k \geq i : x_k < x_i\} = \begin{cases} \#(\mathbf{t}) & \text{si } u_i \prec u_k, \text{ para toda } k \in \{i+1, \ldots, \#(\mathbf{t})\} \\ l^* & \text{si existe } k > i \text{ tal que } u_i \not\prec u_k \end{cases}$$

donde l^* es el primer índice $k > i$ tal que $u_i \not\prec u_k$.

Para este fin, es suficiente verificar que

$$\inf_k \{k \geq i : x_k < x_i\} = \begin{cases} \#(\mathbf{t}) & \text{si } u_i \prec u_k, \text{ para toda } k \in \{i+1, \ldots, \#(\mathbf{t})\} \\ l^* & \text{si existe } k > i \text{ tal que } u_i \not\prec u_k \end{cases}$$

donde l^* es el primer índice $k > i$ tal que $u_i \not\prec u_k$.

Sin embargo, escribiendo

$$x_k - x_i = \sum_{r=i+1}^{k} (m_r - 1)$$

es posible ver que para todo entero $k > i$, tal que $u_i \prec u_k$ se tiene que

$$\sum_{r=i+1}^{k} m_r \geq (k-i) \quad \text{por lo que} \quad x_k - x_i \geq 0.$$

Para este fin, es suficiente verificar que

$$\inf_k \{k \geq i : x_k < x_i\} = \begin{cases} \#(\mathbf{t}) & \text{si } u_i \prec u_k, \text{ para toda } k \in \{i+1, \ldots, \#(\mathbf{t})\} \\ l^* & \text{si existe } k > i \text{ tal que } u_i \not\prec u_k \end{cases}$$

donde l^* es el primer índice $k > i$ tal que $u_i \not\prec u_k$.

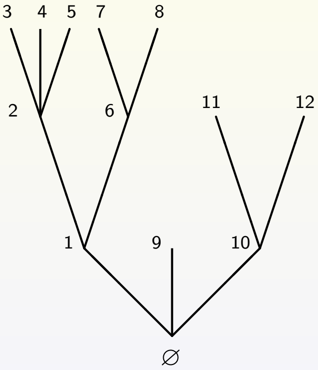
Sin embargo, escribiendo

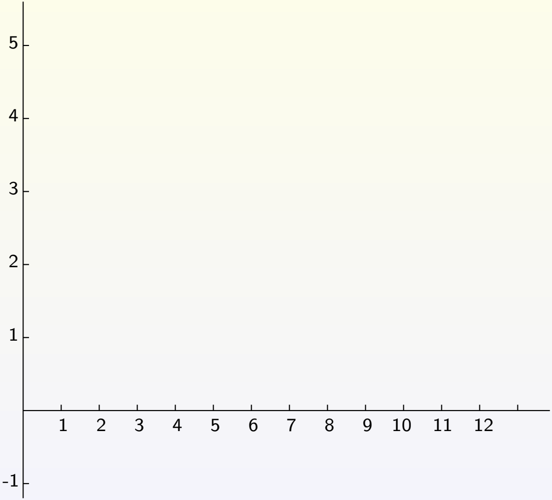
$$x_k - x_i = \sum_{r=i+1}^{k} (m_r - 1)$$

es posible ver que para todo entero $k > i$, tal que $u_i \prec u_k$ se tiene que

$$\sum_{r=i+1}^{k} m_r \geq (k-i) \quad \text{por lo que} \quad x_k - x_i \geq 0.$$

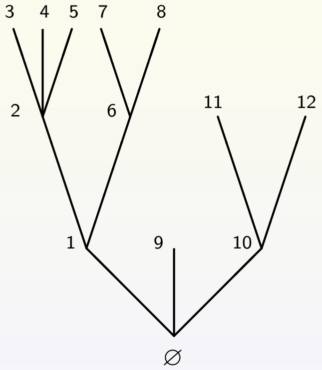
Por otro lado, $x_{l^*} - x_i = -1$ si l^* es el primer índice $k > i$ tal que u_k no es descendiente de u_i ($k = \#(\mathbf{t})$ si tal l^* no existe).

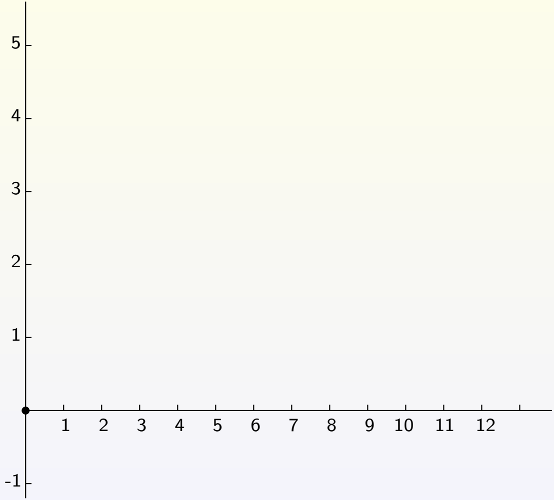




Árbol con raíz $\mathbf{t}$

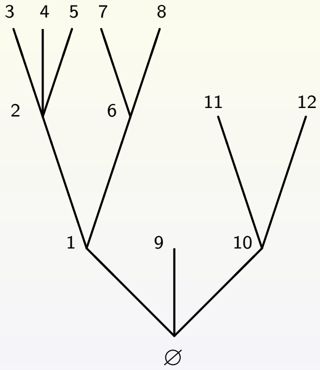
Trayectoria de Lukasiewicz asociada a $\mathbf{t}$.

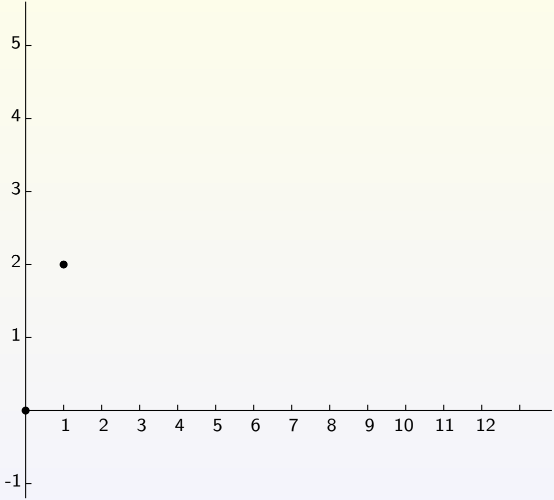




Árbol con raíz $\mathbf{t}$

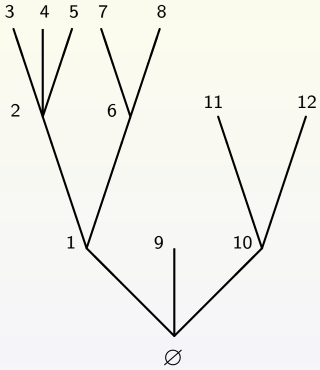
Trayectoria de Lukasiewicz asociada a $\mathbf{t}$.



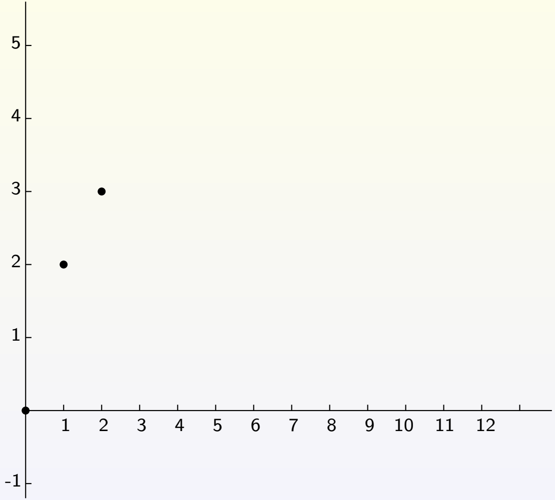


Árbol con raíz $\mathbf{t}$

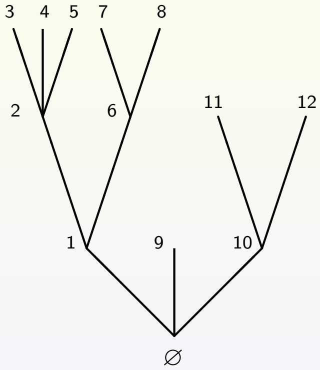
Trayectoria de Lukasiewicz asociada a $\mathbf{t}$.



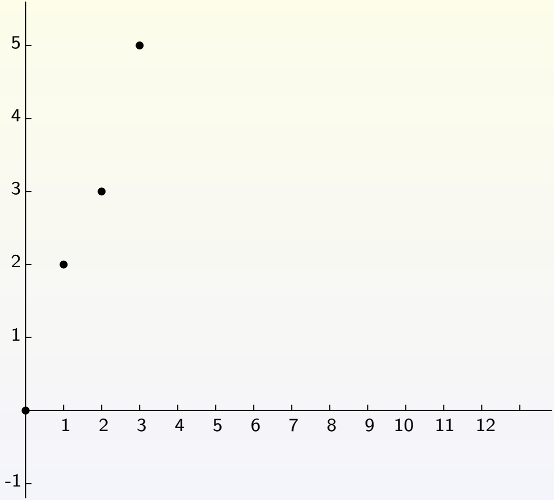
Árbol con raíz $\mathbf{t}$



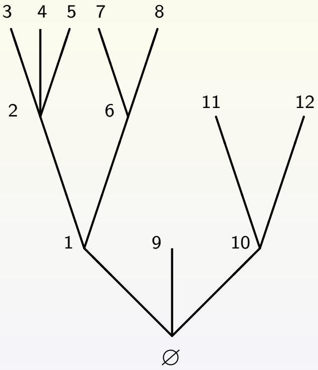
Trayectoria de Lukasiewicz asociada a $\mathbf{t}$.



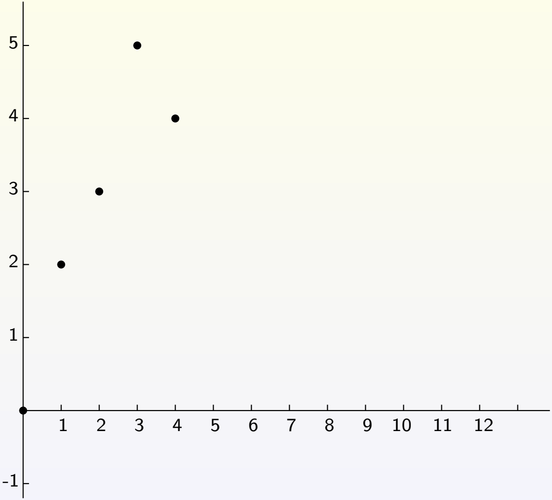
Árbol con raíz $\mathbf{t}$



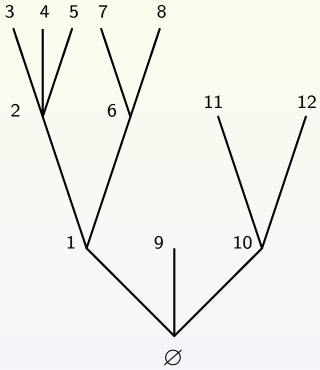
Trayectoria de Lukasiewicz asociada a $\mathbf{t}$.



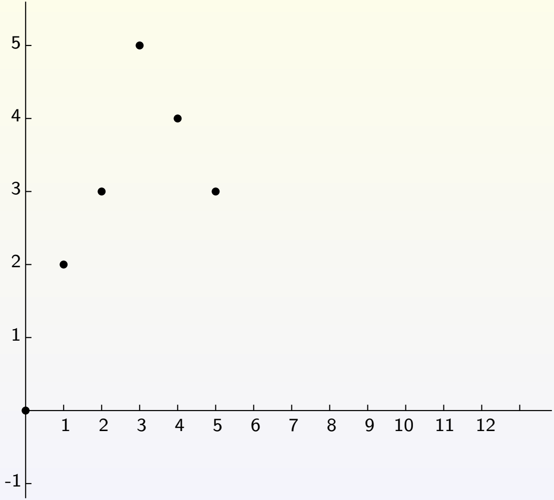
Árbol con raíz t



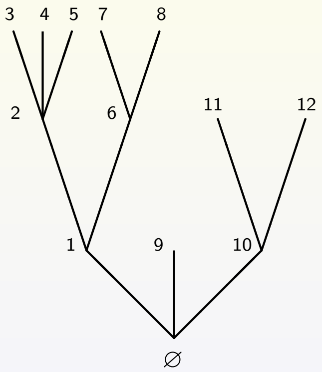
Trayectoria de Lukasiewicz asociada a t.



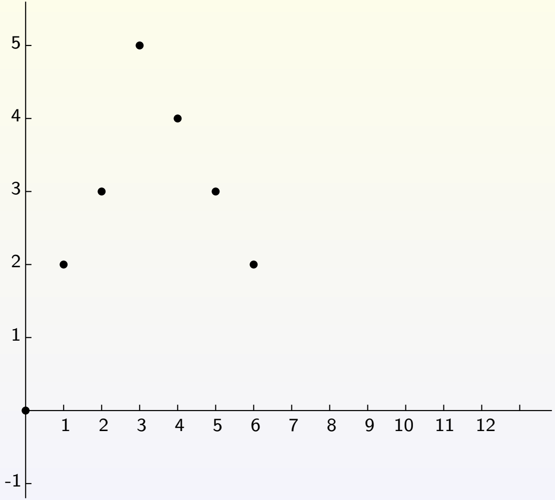
Árbol con raíz t



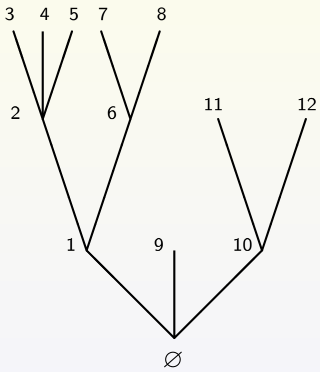
Trayectoria de Lukasiewicz asociada a t.



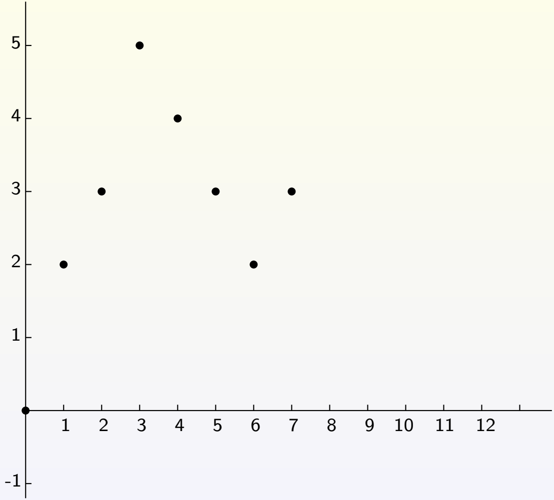
Árbol con raíz t



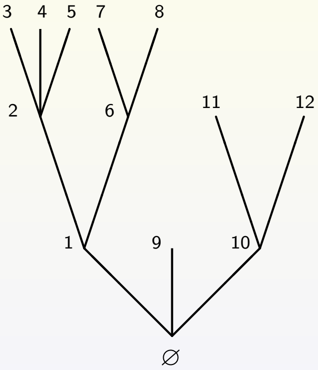
Trayectoria de Lukasiewicz asociada a t.

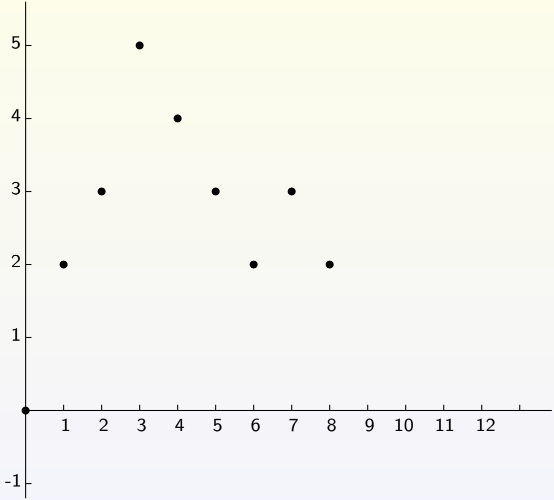


Árbol con raíz t



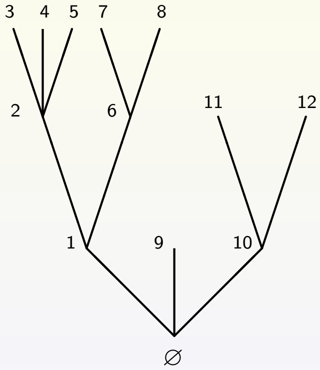
Trayectoria de Lukasiewicz asociada a t.

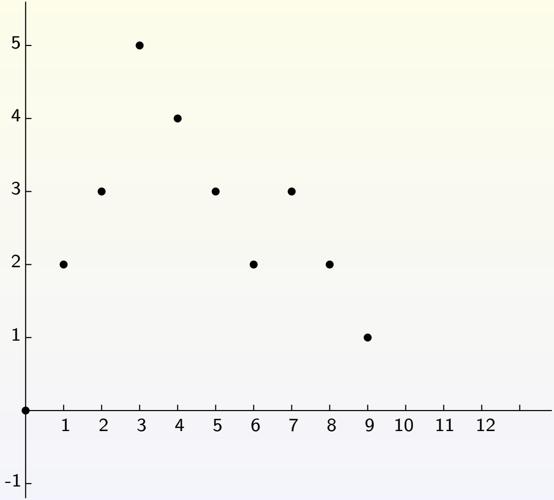




Árbol con raíz $\mathbf{t}$

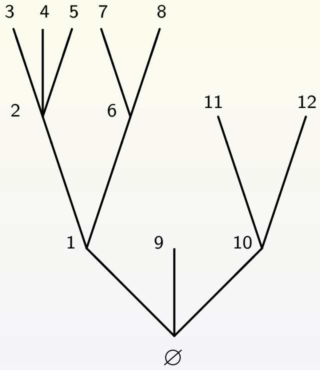
Trayectoria de Lukasiewicz asociada a $\mathbf{t}$.



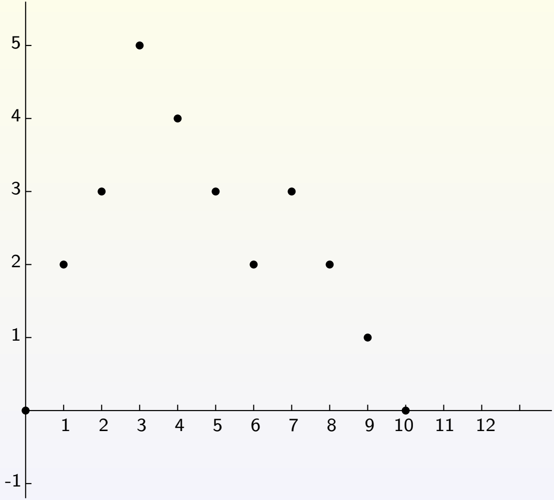


Árbol con raíz $\mathbf{t}$

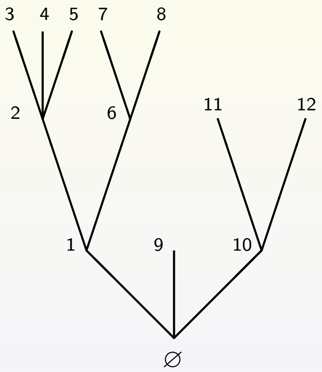
Trayectoria de Lukasiewicz asociada a $\mathbf{t}$.



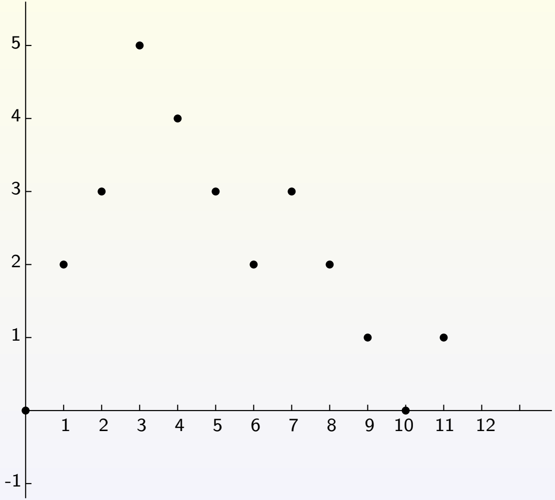
Árbol con raíz t



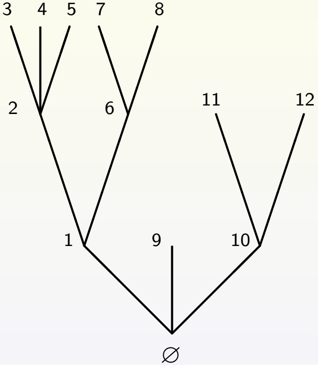
Trayectoria de Lukasiewicz asociada a t.

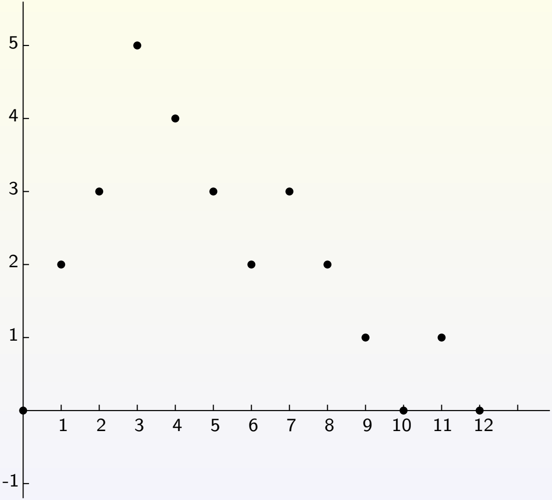


Árbol con raíz t



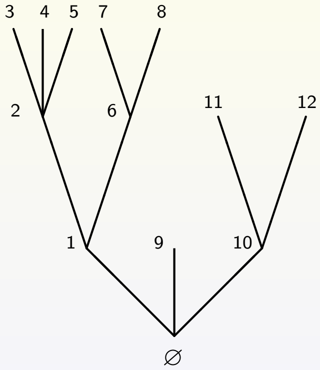
Trayectoria de Lukasiewicz asociada a t.

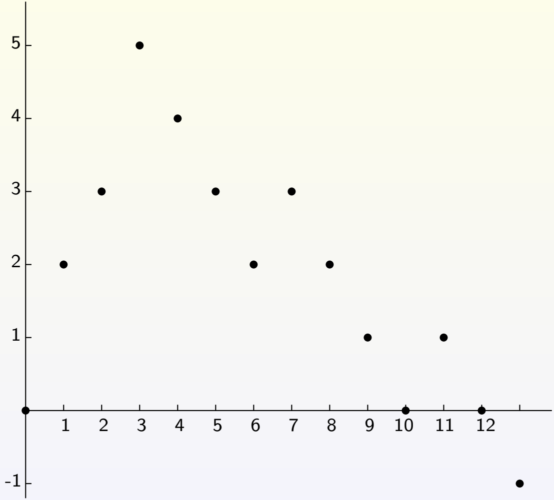




Árbol con raíz $\mathbf{t}$

Trayectoria de Lukasiewicz asociada a $\mathbf{t}$.





Árbol con raíz t

Trayectoria de Lukasiewicz asociada a t.