Procesos de ramificación y árboles aleatorios.

Juan Carlos Pardo Millán

CIMAT, Guanajuato

Probabilidad de extinción

Ahora vamos a calcular la probabilidad de extinción del proceso de Bienaymé-Galton-Watson. Para ello, antes vamos a introducir los siguientes conceptos.

Probabilidad de extinción

Ahora vamos a calcular la probabilidad de extinción del proceso de Bienaymé-Galton-Watson. Para ello, antes vamos a introducir los siguientes conceptos.

Definición

Por extinción vamos a entender como el evento en que la sucesión $(Z_n)_{n\geq 0}$ *de variables aleatorias consiste en ceros para toda* $n \geq n^*$ *para algún* n^* *finito, y lo vamos a denotar por* $\{Ext\}$*. Tomaremos a* η *como la probabilidad de extinción, es decir,* $\eta = \mathbb{P}(Ext)$*.*

Teorema

Si la extinción no ocurre, entonces $\lim_{n\to\infty} Z_n = +\infty$. *Además, tenemos*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Z_n = 0) = \mathbb{P}\Big(Ext\Big) = \eta,$$

donde η *es la raíz no negativa más pequeña de la ecuación* $s = f(s)$. *Además* $\eta = 1$ *si* $\mu \leq 1$ *y* $\eta < 1$ *si* $\mu > 1$ *siempre y cuando* $\mathbb{P}(Z_1 = 1) < 1$.

Teorema

Si la extinción no ocurre, entonces $\lim_{n\to\infty} Z_n = +\infty$. *Además, tenemos*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Z_n = 0) = \mathbb{P}\Big(Ext\Big) = \eta,$$

donde η *es la raíz no negativa más pequeña de la ecuación* $s = f(s)$*.*
Además $\eta = 1$ *si* $\mu \leq 1$ *y* $\eta < 1$ *si* $\mu > 1$ *siempre y cuando* $\mathbb{P}(Z_1 = 1) < 1$*.*

Demostración: Como Z es una cadena de Markov irreducible con dos clases y $\{0\}$ es un estado absorbente, la clase $\{1, 2, 3, \ldots\}$ es transitoria. Esto prueba la primera parte del teorema.

Teorema

Si la extinción no ocurre, entonces $\lim_{n\to\infty} Z_n = +\infty$. *Además, tenemos*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Z_n = 0) = \mathbb{P}\Big(Ext\Big) = \eta,$$

donde η *es la raíz no negativa más pequeña de la ecuación* $s = f(s)$. *Además* $\eta = 1$ *si* $\mu \leq 1$ *y* $\eta < 1$ *si* $\mu > 1$ *siempre y cuando* $\mathbb{P}(Z_1 = 1) < 1$.

Demostración: Como Z es una cadena de Markov irreducible con dos clases y $\{0\}$ es un estado absorbente, la clase $\{1, 2, 3, \ldots\}$ es transitoria. Esto prueba la primera parte del teorema.

Ahora definamos a los conjuntos $A_n = \{Z_n = 0\}$, y la probabilidad del evento A_n como $\eta_n = \mathbb{P}(A_n)$ y por convención $\eta_0 = 0$.

Claramente se tiene $A_n \subseteq A_{n+1}$ ya que el cero es un estado absorbente, entonces tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A,$$

así vemos que

$$\eta = \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\Big(\lim_{n\to\infty} A_n\Big) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = \lim_{n\to\infty} \eta_n.$$

Claramente se tiene $A_n \subseteq A_{n+1}$ ya que el cero es un estado absorbente, entonces tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A,$$

así vemos que

$$\eta = \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\Big(\lim_{n\to\infty} A_n\Big) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = \lim_{n\to\infty} \eta_n.$$

Por otro lado sabemos que $f_n(0) = \mathbb{P}(A_n)$, esto implica que $\lim_{n\to\infty} f_n(0) = \lim_{n\to\infty} \eta_n$. Ahora como $\eta_n = f_n(0) = f(f_{n-1}(0)) = f(\eta_{n-1})$, y $\lim_{n\to\infty} \eta_n = \eta$, entonces del Teorema de Convergencia Dominada vemos

$$\eta = \lim_{n\to\infty} \eta_n = \lim_{n\to\infty} f(\eta_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\big[(\eta_{n-1})^{Z_1}\big] = \mathbb{E}[\eta^{Z_1}] = f(\eta).$$

Recordemos que f es una función creciente, convexa en el intervalo $[0, 1]$, ya que

$$f''(s) = \mathbb{E}[Z_1(Z_1 - 1)s^{(Z_1-2)}] \geq 0 \quad \text{para} \quad s \geq 0,$$

y tal que $f(1) = 1$.

Recordemos que f es una función creciente, convexa en el intervalo $[0,1]$, ya que

$$f''(s) = \mathbb{E}[Z_1(Z_1-1)s^{(Z_1-2)}] \geq 0 \quad \text{para} \quad s \geq 0,$$

y tal que $f(1) = 1$.

En consecuencia, f tiene a lo mas dos puntos fijos en el intervalo $[0,1]$. Lo que veremos a continuación es que 1 es el único punto fijo de f en el $[0,1]$ si $\mu \leq 1$ y si $\mu > 1$, f tiene otro punto fijo distinto de 1 el cual veremos que es η.

Recordemos que f es una función creciente, convexa en el intervalo $[0,1]$, ya que

$$f''(s) = \mathbb{E}[Z_1(Z_1-1)s^{(Z_1-2)}] \geq 0 \quad \text{para} \quad s \geq 0,$$

y tal que $f(1) = 1$.

En consecuencia, f tiene a lo mas dos puntos fijos en el intervalo $[0,1]$. Lo que veremos a continuación es que 1 es el único punto fijo de f en el $[0,1]$ si $\mu \leq 1$ y si $\mu > 1$, f tiene otro punto fijo distinto de 1 el cual veremos que es η.

Supongamos que $\mu < 1$, esto nos permite afirmar que $f'(1) < 1$; como $f'(s)$ es no decreciente afirmamos que $f'(s) < 1$ para toda $s \in [0,1)$. Si suponemos que $\mu = 1$ y $\mathbb{P}(Z_1 = 1) < 1$, entonces $\mathbb{P}(Z_1 = n) > 0$ para algún $n \geq 2$, y como $f'_X(1) = 1$, afirmamos que $f'_X(s) < 1$ para toda $s \in [0,1)$ ya que el $\lim_{s\to 1} f'_X(s) = 1$ y $f_X(s)$ es estrictamente creciente.

Si suponemos que $\mu > 1$, lo que vamos a tener es que $\lim_{s \to 1} f'_X(s) > 1$, por continuidad de $f'_X(s)$ existe un s_0 en el intervalo $(0, 1)$ tal que para toda $s \in (s_0, 1)$, $f'_X(s) > 1$ y por el teorema del valor medio para derivadas tenemos que

$$f'_X(\xi) = \frac{f_X(1) - f_X(s_0)}{1 - s_0} > 1 \qquad \text{para alguna } \xi \in (s_0, 1)$$

y como $f_X(1) = 1$ entonces $f_X(s_0) - s_0 < 0$.

Si suponemos que $\mu > 1$, lo que vamos a tener es que $\lim_{s\to 1} f'_X(s) > 1$, por continuidad de $f'_X(s)$ existe un s_0 en el intervalo $(0,1)$ tal que para toda $s \in (s_0, 1)$, $f'_X(s) > 1$ y por el teorema del valor medio para derivadas tenemos que

$$f'_X(\xi) = \frac{f_X(1) - f_X(s_0)}{1 - s_0} > 1 \qquad \text{para alguna } \xi \in (s_0, 1)$$

y como $f_X(1) = 1$ entonces $f_X(s_0) - s_0 < 0$.

Ahora $f_X(s) - s$ es continua en s y no negativa en $s = 0$, entonces por el teorema del valor intermedio vamos a tener un cero en $\eta \in [0, s_0)$. Por lo tanto afirmamos que tenemos una raíz la cual tiene que ser η, ya que $0 = \eta_0 < \eta$, entonces al iterar por la función creciente f_X vemos que $\eta_n < \eta$.