Verosimilitud en Confiabilidad

Dr. Angel E. Muñoz Zavala

Ejemplo Partículas α: Tiempo de Emisión (Segundos)

Time		Interarrival Times Frequency of Occurrence			
Interval Endpoint		All Times	Random Samples of Times		
lower	upper	$n = 10220$	$n = 2000$	$n = 200$	n=20
t_{j-1}	t_j		d_j		
0	100	1609	292	41	3
100	300	2424	494	44	7
300	500	1770	332	24	4
500	700	1306	236	32	1
700	1000	1213	261	29	3
1000	2000	1528	308	21	2
2000	4000	354	73	9	0
4000	∞	16	4	0	0
		10220	2000	200	20

Nota: Los análisis siguientes serán realizados utilizando la muestra de tamaño 20 (última columna) para simplificar los cálculos descritos.

Ejemplo Partículas α: Distribución Exponencial

Verosimilitud

$$L(\lambda|T)=\left[1-e^{-100\lambda}\right]^3*\left[e^{-100\lambda}-e^{-300\lambda}\right]^7*\left[e^{-300\lambda}-e^{-500\lambda}\right]^4$$
$$*\left[e^{-500\lambda}-e^{-700\lambda}\right]^1*\left[e^{-700\lambda}-e^{-1000\lambda}\right]^3*\left[e^{-1000\lambda}-e^{-2000\lambda}\right]^2$$

LogVerosimilitud

$$l(\lambda|T)=3\log\left[1-e^{-100\lambda}\right]+7\log\left[e^{-100\lambda}-e^{-300\lambda}\right]+4\log\left[e^{-300\lambda}-e^{-500\lambda}\right]$$
$$+\log\left[e^{-500\lambda}-e^{-700\lambda}\right]+3\log\left[e^{-700\lambda}-e^{-1000\lambda}\right]+2\log\left[e^{-1000\lambda}-e^{-2000\lambda}\right]$$

Maximizar LogVerosimilitud

$$\frac{\partial l(\lambda|T)}{\partial\lambda}=\frac{300e^{-100\lambda}}{1-e^{-100\lambda}}+\frac{2100e^{-300\lambda}-700e^{-100\lambda}}{e^{-100\lambda}-e^{-300\lambda}}+\frac{2000e^{-500\lambda}-1200e^{-300\lambda}}{e^{-300\lambda}-e^{-500\lambda}}$$
$$+\frac{700e^{-700\lambda}-500e^{-500\lambda}}{e^{-500\lambda}-e^{-700\lambda}}+\frac{3000e^{-1000\lambda}-2100e^{-700\lambda}}{e^{-700\lambda}-e^{-1000\lambda}}+\frac{4000e^{-2000\lambda}-2000e^{-1000\lambda}}{e^{-1000\lambda}-e^{-2000\lambda}}=0$$

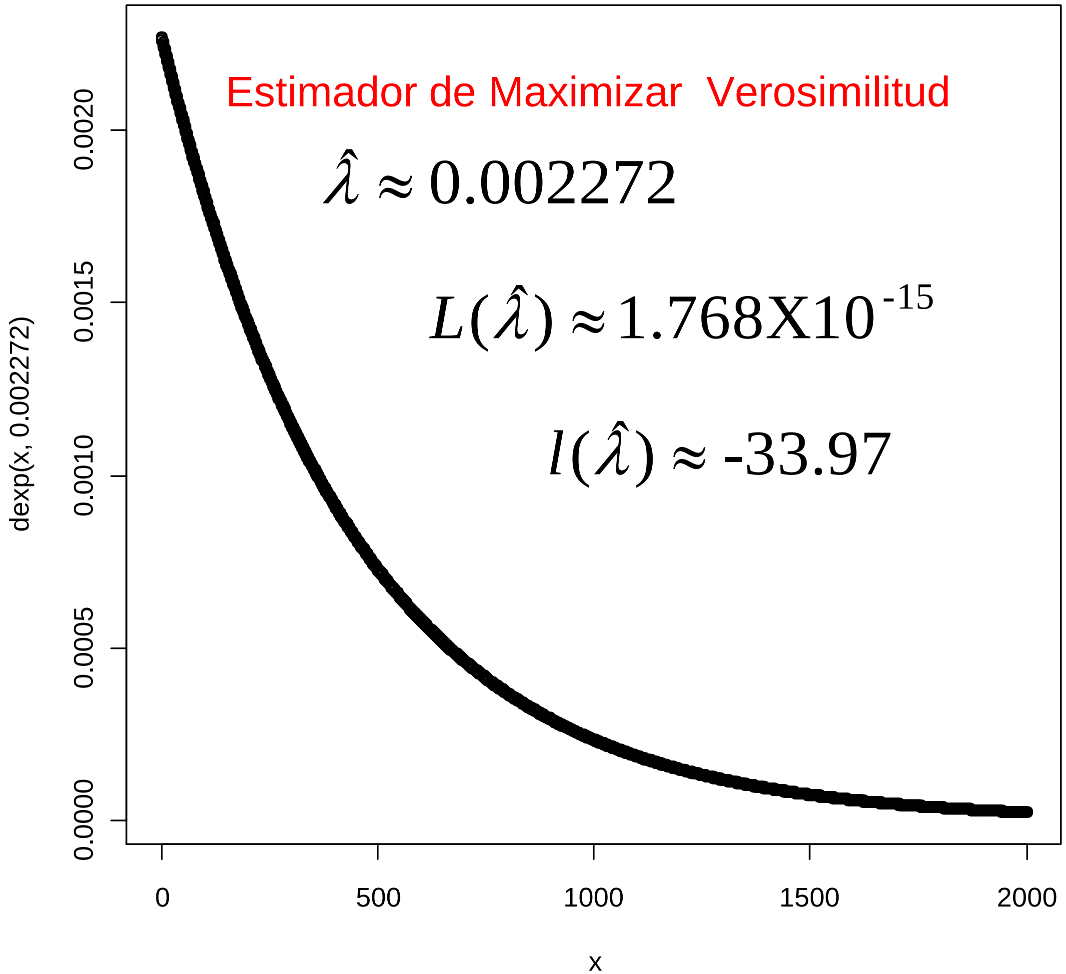
Optimización utilizando el Método Numérico de Bisección

a	b	$f(a)$	$f(b)$	m	$f(m)$
0.00215	0.003	474.92	-2001.82	0.002575	-978.5
0.00215	0.002575	474.92	-978.5	0.0023625	-320.22
0.00215	0.0023625	474.92	-320.22	0.00225625	57.79
0.00225625	0.0023625	57.79	-320.22	0.002309375	-135.76
0.00225625	0.002309375	57.79	-135.76	0.002282813	-40.16
0.00225625	0.002282813	57.79	-40.16	0.002269531	8.51
0.002269531	0.002282813	8.51	-40.16	0.002276172	-15.9
0.002269531	0.002276172	8.51	-15.9	0.002272851	-3.71
0.002269531	0.002272851	8.51	-3.71	0.002271191	2.40

Estimador de Maximizar Verosimilitud

$$\hat{\lambda} \approx 0.002272$$

Ejemplo Partículas α:
Densidad Distribución Exponencial



Verosimilitud Relativa

La función de verosimilitud L(θ) es dificil de interpretar, en cambio la función de verosimilitud relativa

$$R(\theta) = \frac{L(\theta)}{L(\hat{\theta})}$$

Permite juzgar la probabilidad de los datos para valores de θ, relativos a la probabilidad de la estimación máximo-verosimil.

Ejemplo: Si R(θ)=0.1 entonces, $L(\theta) = .1L(\hat{\theta})$. Esto es, la probabilidad de los datos en $\hat{\theta}$ es 10 veces más probable que en θ.

La información que los datos tienen sobre el parámetro θ, está contenida en la función de verosimilitud L(θ), de aqui que además de obtener la estimación puntual de θ, se puede obtener su incertidumbre utilizando el esquema de verosimilitud. Esta incertidumbre de estimación, la obtenemos en forma de un intervalo de verosimilitud-confianza.

Para obtener intervalos de verosimilitud-confianza, utilizamos el hecho de que cuando el parámetro verdadero es θ, entonces la estadística –2log[R(θ)] se distribuye como Ji-cuadrada aproximadamente.

Intervalo de Confianza por Verosimilitud Relativa

Un intervalo de verosimilitud-confianza 100(1-α)% para θ, es el conjunto de valores de θ tales que

$$-2\log[R(\theta)] \leq \chi^2(1-\alpha;1),$$

o equivalentemente, los valores de θ que satisfacen

$$R(\theta) \geq \exp\left[-\chi^2(1-\alpha;1)/2\right]$$

Así, para obtener un intervalo de verosimilitud-confianza, con un 95% de confianza para θ, elegimos el cuantil 95% para la distribución Ji-cuadrada con un grado de libertad, esto es,

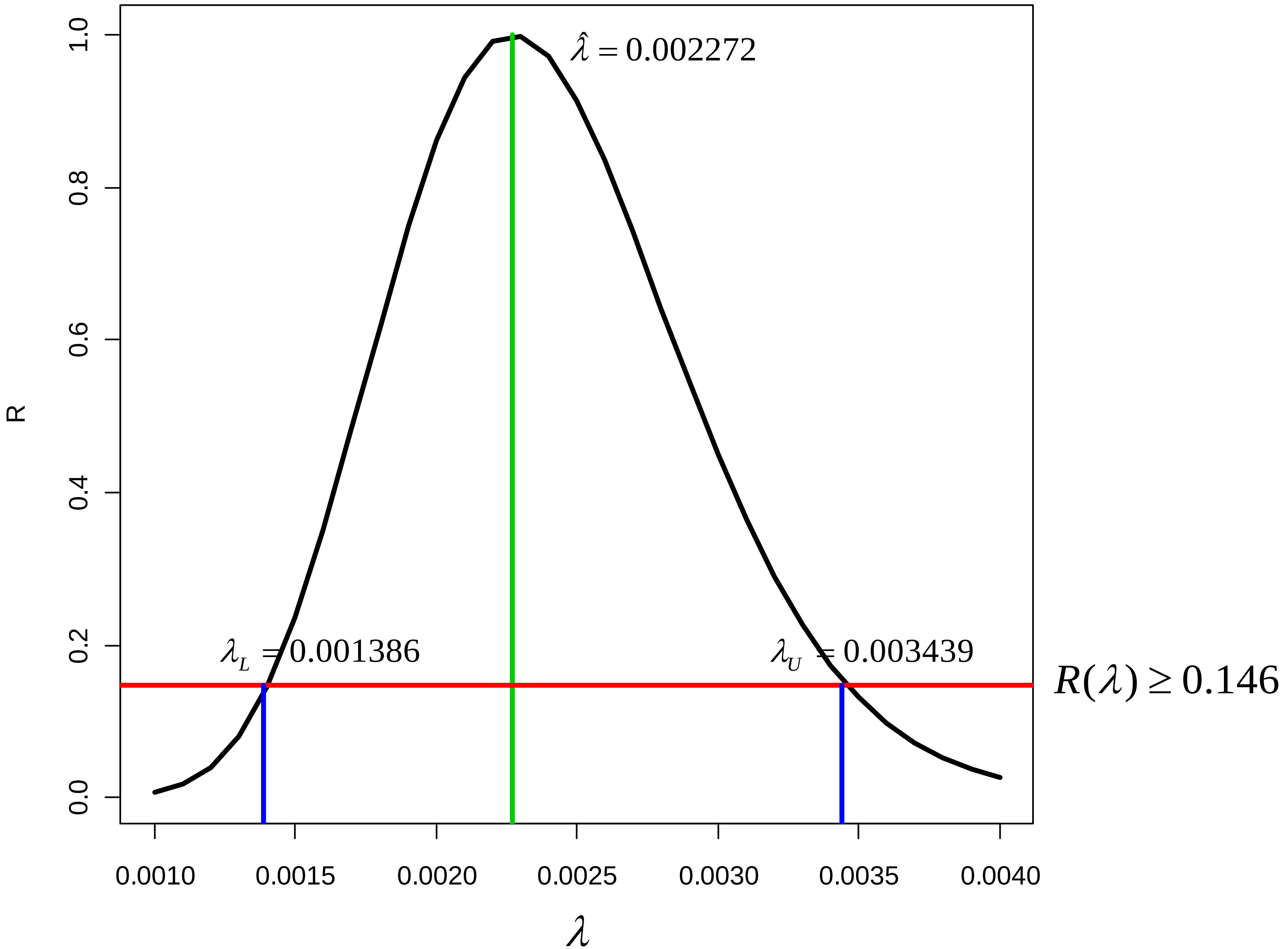
$$\chi^2(.95;1)` = 3.842$$

El intervalo de verosimilitud confianza con una confianza de 95% para θ, será entonces el conjunto de valores de θ, que satisfacen,

$$R(\theta) \geq .146$$

Cuando la función de verosimilitud tiene forma asimétrica, los intervalos de verosimilitud-confianza resultan también asimétricos.

Intervalo de Confianza por Verosimilitud Relativa



Ejemplo Partículas α: Distribución Weibull

Verosimilitud

$$L(\alpha,\beta|T)=\left[1-e^{-\left(\frac{100}{\alpha}\right)^{\beta}}\right]^{3}*\left[e^{-\left(\frac{100}{\alpha}\right)^{\beta}}-e^{-\left(\frac{300}{\alpha}\right)^{\beta}}\right]^{7}*\left[e^{-\left(\frac{300}{\alpha}\right)^{\beta}}-e^{-\left(\frac{500}{\alpha}\right)^{\beta}}\right]^{4}$$

$$*\left[e^{-\left(\frac{500}{\alpha}\right)^{\beta}}-e^{-\left(\frac{700}{\alpha}\right)^{\beta}}\right]^{1}*\left[e^{-\left(\frac{700}{\alpha}\right)^{\beta}}-e^{-\left(\frac{1000}{\alpha}\right)^{\beta}}\right]^{3}*\left[e^{-\left(\frac{1000}{\alpha}\right)^{\beta}}-e^{-\left(\frac{2000}{\alpha}\right)^{\beta}}\right]^{2}$$

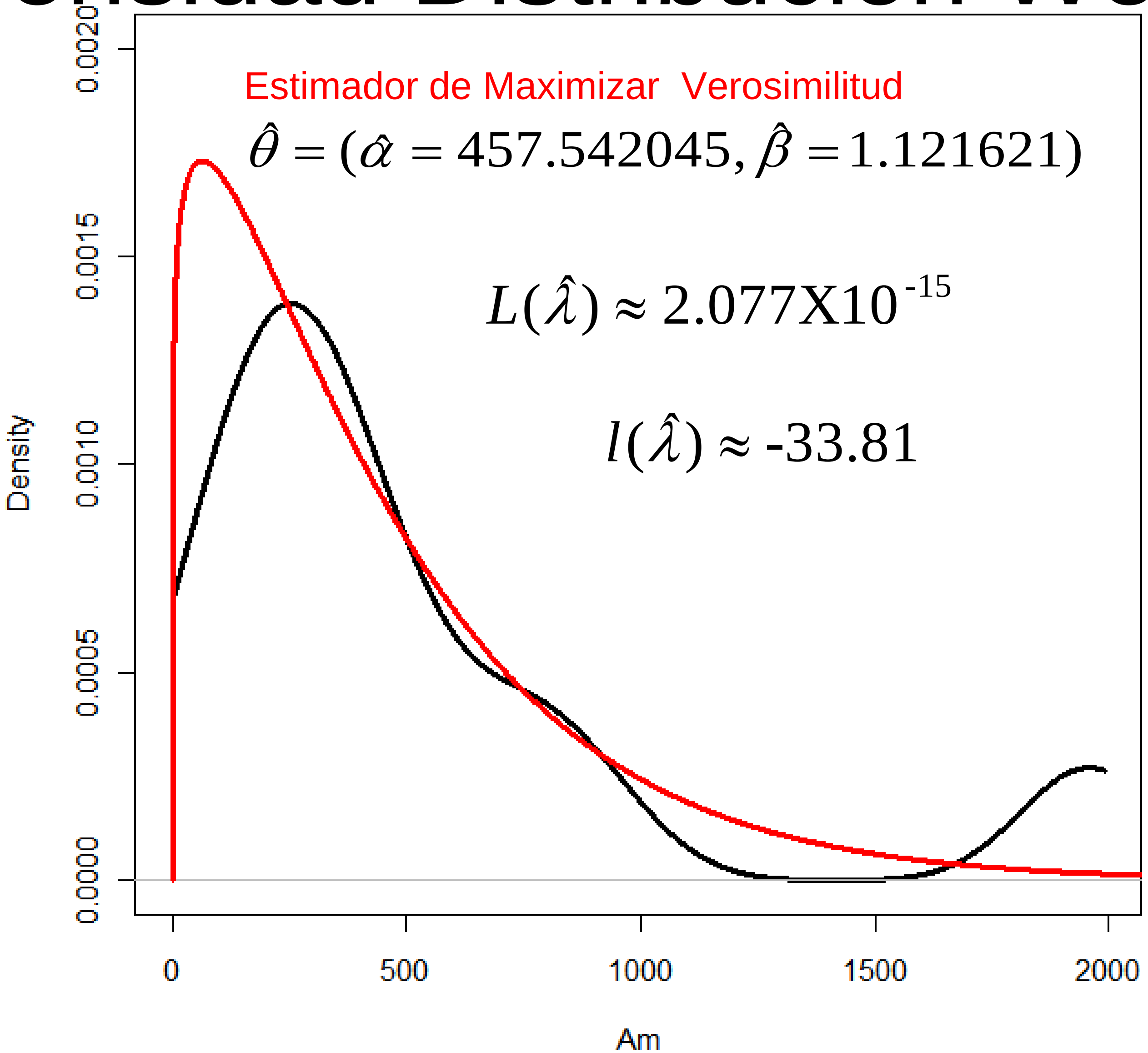
LogVerosimilitud

$$l(\alpha,\beta|T)=3\log\left[1-e^{-\left(\frac{100}{\alpha}\right)^{\beta}}\right]+7\log\left[e^{-\left(\frac{100}{\alpha}\right)^{\beta}}-e^{-\left(\frac{300}{\alpha}\right)^{\beta}}\right]+4\log\left[e^{-\left(\frac{300}{\alpha}\right)^{\beta}}-e^{-\left(\frac{500}{\alpha}\right)^{\beta}}\right]$$

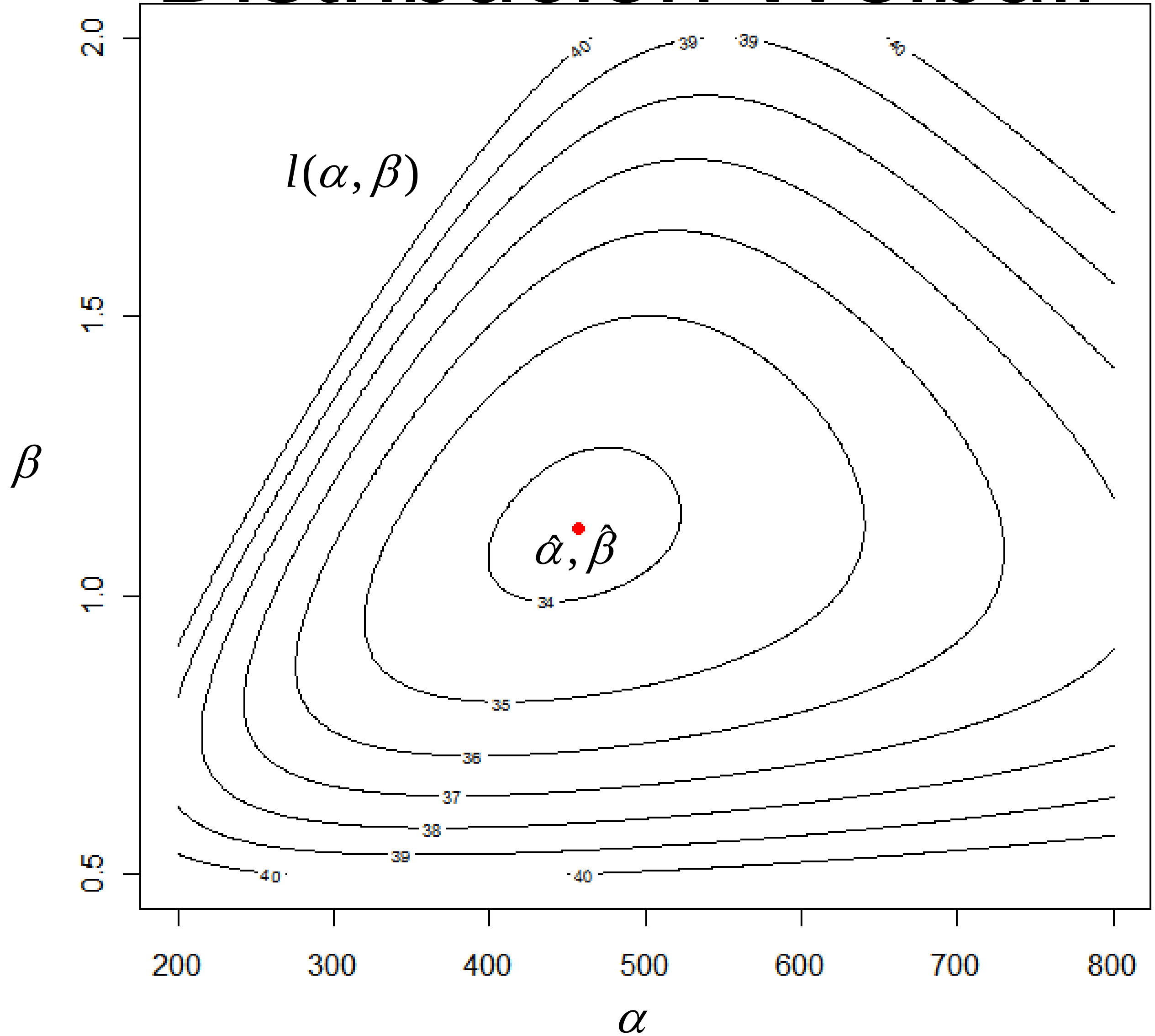
$$+\log\left[e^{-\left(\frac{500}{\alpha}\right)^{\beta}}-e^{-\left(\frac{700}{\alpha}\right)^{\beta}}\right]+3\log\left[e^{-\left(\frac{700}{\alpha}\right)^{\beta}}-e^{-\left(\frac{1000}{\alpha}\right)^{\beta}}\right]+2\log\left[e^{-\left(\frac{1000}{\alpha}\right)^{\beta}}-e^{-\left(\frac{2000}{\alpha}\right)^{\beta}}\right]$$

Nota: Ejemplo de la emisión de partículas con tamaño de muestra n=20:

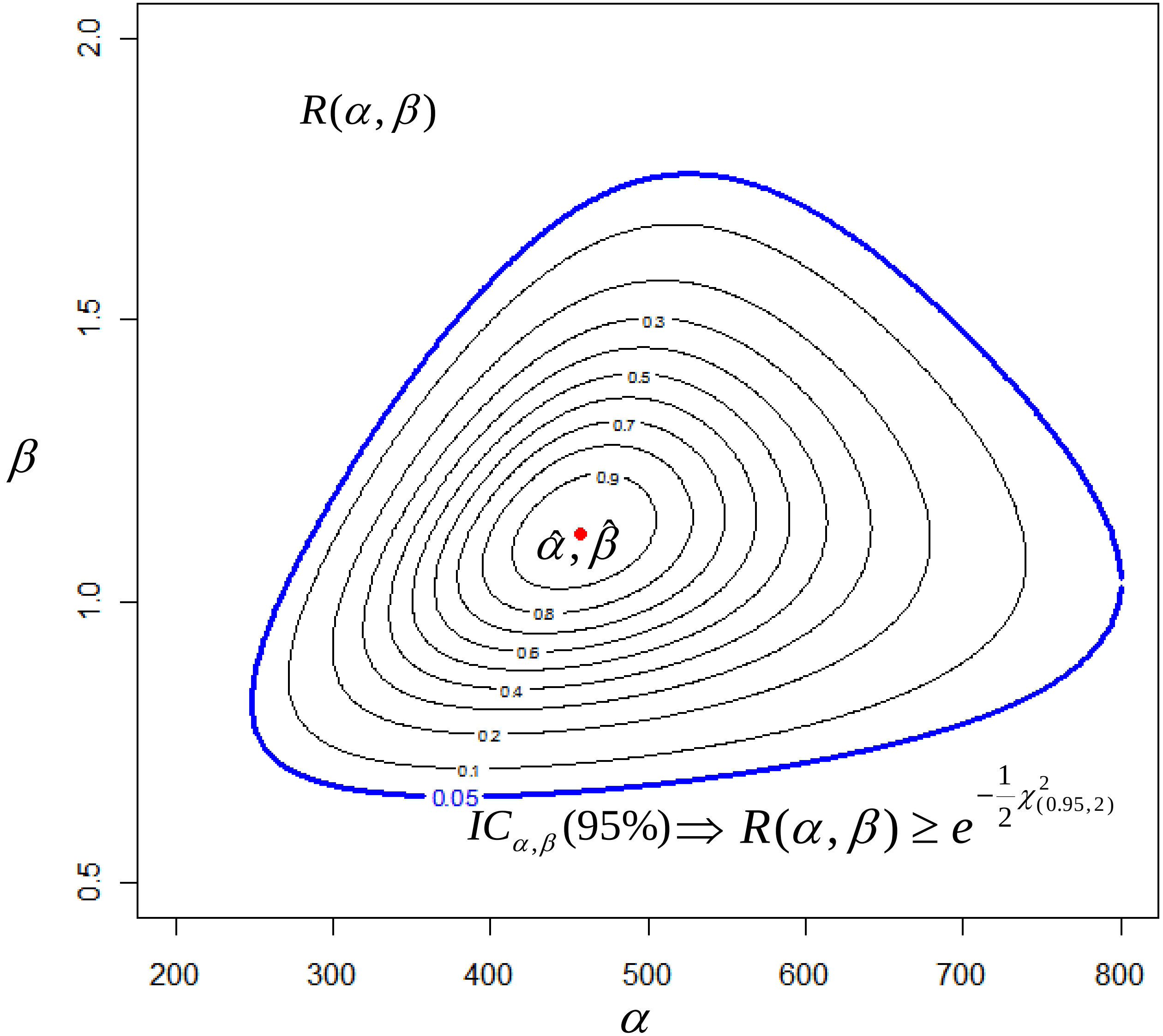
Ejemplo Partículas α: Densidad Distribución Weibull



Log-verosimilitud: Distribución Weibull



Verosimilitud Relativa: Distribución Weibull



Prueba de Razón de Verosimilitud

Esta prueba es utilizada para comparar la verosimilitud de 2 distribuciones, con diferente número de parámetros estimados, utilizadas para modelar la misma muestra. La Hipótesis Nula se expresa a favor de elegir la distribución con menor número de parámetros estimados.

$$Ho : Distribución\#1 \qquad L_{D1}(\hat{\theta})$$

$$Ha : Distribución\#2 \qquad L_{D2}(\hat{\theta})$$

La Hipótesis Nula se rechaza cuando la verosimilitud de la distribución con mayor número (Hipótesis Alternativa) de parámetros es suficientemente grande con respecto a la distribución con menor número de parámetros. En otras palabras, Rechazo Ho sí:

$$-2\log\left[\frac{L_{D1}(\hat{\theta})}{L_{D2}(\hat{\theta})}\right] > \chi^2_{(1-\alpha,k)}$$

donde k es la diferencia de parámetros estimados entre las distribuciones. Cuando ambas distribuciones tienen el mismo número de parámetros estimados, simplemente se elige la distribución con mayor Verosimilitud.

Prueba de Razón de Verosimilitud

Para el ejemplo de las partículas de Am con tamaño de muestra n=20:

$$Ho : Exponencial \qquad L_{Exp}(\hat{\theta}) = 1.768\text{e-}15$$

$$Ha : Weibull \qquad L_{Weibull}(\hat{\theta}) = 2.077\text{e-}15$$

Rechazo *Ho* si… $-2\log\left[\dfrac{L_{Exp}(\hat{\theta})}{L_{Weibull}(\hat{\theta})}\right] > \chi^2_{(0.95,1)}$

$$-2\log\left[\frac{L_{Exp}(\hat{\theta})}{L_{Weibull}(\hat{\theta})}\right] = 0.3217981 \qquad \chi^2_{(0.95,1)} = 3.841459$$

$0.3217981 < 3.841459$ $\therefore$ No Rechazo *Ho*

Interpretación:

Aunque la distribución Weibull posee un mejor valor de Verosimilitud, la diferencia no es suficientemente grande para preferirla sobre la distribución Exponencial.